



CAPÍTULO I

Contenidos

1. Conjuntos Numéricos. Operaciones con Números Reales.
2. Múltiplos y Divisores. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.
3. Razones y Proporciones. Porcentaje. Regla de Tres.
4. Respuestas de las Prácticas.
5. Autoevaluación.

Distribución de contenidos por clase:

Clase N° 1: Contenido 1.

Clase N° 2: Contenido 2.

Clase N° 3: Contenido 3.



1. Conjuntos Numéricos. Operaciones con Números Reales.

\mathbb{N} es el conjunto de los números naturales.

Sus elementos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n, ...

- La suma de números naturales es un número natural.
- La Adición de números naturales satisface las propiedades conmutativa, asociativa y tiene un elemento neutro que es el 0.
- El producto de números naturales es un número natural.
- La Multiplicación de números naturales satisface las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva respecto a la adición y tiene un elemento neutro que es el 1.
- La Sustracción y la División de números naturales no siempre resulta un número natural. Así, al restar $3 - 5$ y al dividir $12 \div 5$, la diferencia y el cociente no son números naturales.

\mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros.

Sus elementos son: ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Luego $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- La suma de números enteros es un número entero.
- La Adición de números enteros es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 0.
- Todo número entero tiene su opuesto o simétrico aditivo: el opuesto de x es $-x$.
- Para sumar dos números enteros debe tomarse en cuenta sus signos. Así:
 $(-2) + (-3) = -2 - 3 = -5$ $7 - 3 = 4$ $2 - 8 = -6$
- El producto de números enteros es un número entero.
- La Multiplicación de números enteros es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 1, se cumple la propiedad distributiva con respecto a la adición.
- Para multiplicar dos números enteros debe tomarse en cuenta sus signos. Así:
 $4 \cdot 5 = 20 = -4 \cdot (-5)$ $-4 \cdot 5 = -20 = 4 \cdot (-5)$
- La División de números enteros no siempre resulta un número entero. Así, al dividir $-14 \div 3$, el cociente no es un número entero.



\mathbb{Q} es el conjunto de los números racionales o de las fracciones.

Un número racional es el cociente de dos números enteros $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$

Luego $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$

- Todas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (la división por cero no tiene sentido) son cerradas en \mathbb{Q} (siempre se obtiene un número racional).

- La Adición de números racionales es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 0 y todo número tiene su opuesto o simétrico aditivo.

- La Multiplicación de números racionales, es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro que es el 1 y todo número diferente de cero tiene su inverso o simétrico multiplicativo:

El inverso de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

\mathbb{I} es el conjunto de los números irracionales

Sus elementos son los números con desarrollos decimales ilimitados y no periódicos. Por ejemplo:

$$\pi \approx 3,1415926535\dots$$

$$e \approx 2,71\dots$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623\dots$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73205080\dots$$

\mathbb{R} es el conjunto de los números reales

\mathbb{R} es la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Se verifica que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

- Todas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre números reales son posibles, pues resulta siempre un número real.

- Signos de Agrupación y Operaciones: existe un orden para realizar las operaciones si éstas aparecen combinadas. Así:

- ◆ Si hay signos de agrupación, los mismos se eliminan “de adentro hacia fuera”.



Así, al efectuar $\{3 + [5 - (6 - 8) - 2] + 7\}$: 1° se eliminan los paréntesis, 2° los corchetes y en tercer lugar las llaves.

En cambio, al efectuar $(3 + [5 - \{6 - 8\} - 2] + 7)$: 1° se eliminan las llaves, 2° los corchetes y en tercer lugar los paréntesis.

♦ Si hay operaciones combinadas, las mismas se realizan en el siguiente orden:

- 1° Las potencias
- 2° Las Multiplicaciones y las Divisiones
- 3° Las Adiciones y las Sustracciones

- En cuanto a la Relación de Orden en \mathbb{R} : sean a y b dos números reales
 a es mayor que b : $a > b \Leftrightarrow (a + (-b)) \in \mathbb{R}^+$ (\mathbb{R}^+ es el conjunto de los reales positivos).

a es mayor o igual que b : $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

- El Valor Absoluto de un número real x se denota por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Si a es un número real y n es un número natural (diferente de 0), a^n denota la Potencia Enésima de a , es decir, el producto de a por sí mismo n veces.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

a es la base y n es el exponente.

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{para } a \neq 0$$

- Si a es un número real y n es un número natural (mayor que 1), $\sqrt[n]{a}$ denota la Raiz Enésima de a . $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = b \Leftrightarrow b^n = a$

a es la cantidad subradical y n es el índice de la raíz

- ♦ Si $a < 0$ y n es par, $\sqrt[n]{a}$ no está definida en \mathbb{R}
- ♦ Si $a < 0$ y n es impar, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, con $b < 0$
- ♦ Si $a > 0$ y n es par o impar, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ con $b > 0$



• Si en a^n , n es un número racional (de la forma $\frac{p}{q}$), entonces $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ (exponente fraccionario), con $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q > 1$.

Propiedades de las Potencias:

- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Propiedades de las Raíces: (Siempre que estén bien definidas)

- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} = 4\sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$

¡Cuidado! $a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$ (el exponente no es distributivo).

¡Cuidado! $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$ (no se pueden sumar raíces que tienen cantidad subradical diferentes).

$\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}$ (NO se pueden sumar los índices de las raíces).

$\sqrt[n]{a^n \pm b^n} \neq a \pm b$ (NO vale cancelar el índice de la raíz con los exponentes en la cantidad subradical)



Práctica I

1. Utilizando los símbolos de pertenencia (\in) y no pertenencia (\notin), indica a cuál conjunto pertenece cada número de la siguiente tabla:

	$\sqrt[3]{64}$	$\frac{4}{7}$	8	$\sqrt{-4}$	$\frac{-9}{5}$	0,032	$\sqrt{8}$	-6,4	π	$3\sqrt{2}$
<input type="checkbox"/>										
<input type="checkbox"/>										
<input type="checkbox"/>										
I										
<input type="checkbox"/>										

2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales:

$$-2,5; \frac{8}{3}; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{3}; -1; \frac{\pi}{3}$$

3. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor $\frac{3}{5}; \frac{8}{5}; \frac{1}{5}; \frac{4}{5}$?

4. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor $\frac{7}{3}; \frac{7}{8}; \frac{7}{9}; \frac{7}{11}$?

5. ¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor $\frac{7}{5}; \frac{3}{7}; \frac{11}{14}; \frac{3}{11}; \frac{8}{7}$?

6. ¿Cuál de los siguientes números es mayor $\sqrt[4]{4}$ o $\sqrt[8]{8}$?

7. Calcule el valor de las siguientes expresiones:

a) $\{8 - [2 - 4(6 - 3) - 3] - 14\} =$

b) $\left\{1 - 5 \left[-(-1 + 3) + \frac{1}{5}(-1 + 6) \right] - 7(8 + 3)(-2 + 4) \right\} =$

8. Efectuar y simplificar:

a) $\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{5} + \frac{7}{8} \times \frac{3}{2}} =$

b) $\left(\frac{2}{9} - \frac{3}{8}\right) \div \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{6}\right) =$



c) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) =$

d) $\left[(1-2) \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right]^{-1} - \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2^{-1}\right]^{-1} =$

e) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot \left[2 - 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] =$

f) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) =$

9. Efectuar y simplificar:

a) $2^3 + 5^2 =$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 =$

c) $3^3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^{-3} =$

d) $\sqrt{81} =$

e) $\sqrt[5]{(-32)} =$

f) $\sqrt[3]{(-343)} =$

g) $(25)^{\frac{3}{2}} =$

h) $(27)^{\frac{4}{3}} =$

i) $7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800} =$

j) $\left(\frac{2^{-3}}{3^{-2}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3^{-5}}{2^{-4}}\right)^4 \cdot \frac{3^0}{4^{-2}} =$

k) $\left(\frac{1}{0,18}\right)^{-1} \div 0,01 =$

l) $(0,125)^{\frac{2}{3}} =$

m) $\frac{1,15}{5} \cdot \frac{10}{10^{-7}} =$

n) $\frac{2^{-1} \cdot 3^{-1}}{2^{-2} - 3^{-2}} =$

o) $\frac{s^{-1} + t^{-1}}{\frac{s}{t} - \frac{t}{s}} =$

p) $\frac{a^{-1} \cdot b^{-1}}{a^{-3} - b^{-3}} =$

q) $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}} =$

r) $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{11} + \sqrt[3]{-11} + \sqrt[3]{-1}}{\sqrt{(-2)^6} + \sqrt{24} + \sqrt{1}} =$

s) $\sqrt{27^{\frac{2}{3}}} + 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} =$

t) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5}) =$



u) $(\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 =$

v) $\frac{(\sqrt{7} - 2\sqrt{11})}{(2\sqrt{7} + \sqrt{11})} =$

w) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{9}{2}} - 2\sqrt{2}\right)^2 =$

x) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{135} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{32}} + \frac{7}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 20\sqrt[3]{\frac{1}{200}} + 3\sqrt[3]{45} \cdot \frac{1}{6}\sqrt[3]{15} \cdot 4\sqrt[3]{20} =$

10. Calcular el valor de las siguientes expresiones sustituyendo los valores de las letras por:

$$a = -2, b = 3, c = 5, x = -7, y = 12, n = 10, m = -5, q = \frac{1}{2}$$

a) $a^3 - b^2 =$

b) $\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^3 - c} =$

c) $\frac{2xy + 3x}{2x + y - 1} =$

d) $(2y + 3x)^m =$

11. En las siguientes expresiones, las letras representan números reales no nulos, si están en el denominador, y positivos si están elevados a una potencia fraccionaria. Simplifícelas y escríbalas de la forma más compacta posible.

a) $(-2a^2 \cdot b \cdot c^{-4}) \cdot (5a^1 \cdot b^3 \cdot c^5) =$

b) $((x^2 \cdot y^{-1})^2)^{-3} =$

c) $\frac{(10r^{-2} \cdot s)^3}{(50r^3 \cdot s^{-1})^2} =$

d) $(\sqrt[3]{4x^2 \cdot y}) \cdot (\sqrt[3]{2x^5 \cdot y^2}) =$

e) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^6 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-3}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^6 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^9} =$

f) $\sqrt[3]{(c^3 \cdot d^6)^4} =$

g) $\sqrt[3]{x^2 \cdot y} \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot y^2} =$

h) $\left(\sqrt[7]{\frac{x^8 \cdot y^9}{z^2}}\right)^2 =$

i) $\sqrt[4]{125d} \sqrt{25d^6}$

12. Calcular $1 \frac{3}{4}$ de 12.



13. ¿Cuál es el valor de $\left(\frac{1}{0,21}\right)^{-1} \div 0,01$?
14. ¿Cuántas horas son los $\frac{5}{6}$ de un día?
15. ¿Cuántos días son los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de un año de 360 días?
16. ¿Cuántas veces el número 2 contiene a $\frac{1}{4}$?
17. ¿Cuántas veces x contiene a $\frac{1}{x}$?
18. Juan tiene un libro de 160 páginas. Ayer leyó $\frac{1}{4}$ de las páginas y hoy leyó $\frac{1}{4}$ del resto de las páginas. ¿Cuántas páginas le faltan por leer?
19. El promedio de notas de 20 estudiantes es p y el promedio de notas de 10 estudiantes es q . Calcular el promedio de notas de los 30 estudiantes.
20. Una parcela de 200m^2 representa los $\frac{3}{8}$ de un terreno ¿Cuál es la extensión del terreno?
21. Al efectuar la operación $1989^{1989} + 1989$, ¿cuál es la cifra de las unidades?.
22. Dada la suma de las fracciones $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$. ¿Cuántos números deben suprimirse para que la suma de las restantes sea 1?
23. Para que el valor de la fracción $\frac{3}{5}$ se duplique, restamos al denominador un cierto número. ¿Cuál es este número?



2. Múltiplos y Divisores. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo.

Divisor, múltiplo, número primo, números primos entre sí

Un número natural $a \neq 0$ es un divisor de un número natural b si existe un único número natural c tal que $b = c \cdot a$. También se dice que a divide a b , que b es múltiplo de a ó que b es divisible por a . Así:

2 divide a 10 (2 está contenido 5 veces en 10) ó 10 es múltiplo de 2 (10 contiene a 2 cinco veces) ó 10 es divisible por 2, porque $2 \cdot 5 = 10$

4 divide a 32 (4 está contenido 8 veces en 32) ó 32 es múltiplo de 4 (32 contiene a 4 ocho veces) ó 32 es divisible por 4 porque $8 \cdot 4 = 32$

Número Primo es aquel número natural que admite únicamente dos divisores, el mismo número y la unidad. Ejemplo: 3, 5, 7, 13 y 53.

Se puede demostrar que todo número compuesto (no primo) se puede descomponer de manera única en el producto de factores primos.

Números Primos entre sí son dos o más números naturales cuyo único divisor común es la unidad. Ejemplo: 7, 12 y 15 son primos entre sí, ya que:

Los divisores de 7 son: 1 y 7

Los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Los divisores de 15 son: 1, 3, 5 y 15.

El único divisor común entre estos números es 1.

Un Número es Divisible por

- 2 cuando es par (la cifra de las unidades es 2, 4, 6, 8 o 0). Ejemplo: 14, 56, 134, 978 y 34002 son divisibles entre 2.
- 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3 (3, 6, 9, 12, 15, ...). Ejemplo: 45, 84, 159, 378, 996 y 49785 son divisibles entre 3
- 4 cuando es dos veces divisible por 2, o cuando las cifras de las unidades y las decenas son ceros o forman un múltiplo de 4 (4, 8, 12, 16, 20, ...). Ejemplo: 500, 728, 1700, 4536, 78100 y 162940.
- 5 cuando la cifra de las unidades es 0 o 5. Ejemplo: 105, 360, 975 y 47080.
- 6 cuando es divisible por 2 y por 3. Ejemplo: 54, 192, 726 y 5178.

Práctica II

1. Escribir dos números de cuatro cifras que sean a la vez divisibles por 3 y por 5 y que la cifra de las unidades no sea cero.

2. ¿Cuál es el menor de los múltiplos comunes a 6 y 8?



3. ¿Cuál es el número más grande que está contenido exactamente en los números 30 y 24?
4. ¿Cuál es el mayor factor primo de 532?
5. ¿Cuál es la suma de los factores primos de 170?
6. ¿Por cuántos elementos está formado el conjunto de los números primos menores que 31?
7. Tres números primos p , q , r satisfacen las siguientes condiciones: $p+q = r$, $1 < p < q$. ¿Cuál es el menor valor que puede tener r ?
8. ¿Por cuál número es siempre divisible la suma de 3 naturales consecutivos?
9. ¿Cuál es el mayor número de 9 cifras distintas que es divisible por 18?
10. Si se desarrolla la expresión 2137^{753} , ¿cuál es el dígito de las unidades?
11. ¿Cuál es el menor valor entero positivo que debe tener n para que la expresión $(n! + 1)$ no sea un número primo?

Mínimo Común Múltiplo

El Mínimo Común Múltiplo de dos o más números naturales, es el menor número natural que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos. El mínimo común múltiplo (m.c.m) de 2 o más números es igual al producto de todos los factores primos comunes o no, con su mayor exponente.

Ejemplo:

- Hallar el m.c.m de 48 y 60

Solución: Para hallar el m.c.m (48, 60) descomponemos cada número en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 48 = 2^4 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

Luego realizamos el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

$$\text{m.c.m (48,60)} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$$



Máximo Común Divisor

El Máximo Común Divisor de dos o más números naturales, es el mayor número natural que los divide exactamente. El máximo común divisor (M.C.D) de 2 o más números es igual al producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

Ejemplo:

- Hallar el M.C.D. de 36, 70 y 72

Solución: Para hallar el M.C.D (36,70,72) descomponemos cada número en sus factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Luego realizamos el producto de los factores primos comunes con su menor exponente.

$$\text{M.C.D (36,60,72)} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Práctica III

1. Calcular el Máximo Común Divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 64 ; 24 y 28

b) 1260 y 642

c) 150 y 77

d) a^2b^2 , $3a^3b$ y $9a^5b^4$

2. ¿Cuántos números de los 100 primeros números naturales son divisibles por 2, 3, 4 y 5 simultáneamente?

3. Una persona camina un número exacto de pasos andando 650cm, 800cm y 100cm. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

4. Una persona tiene Bs. 8000, otra tiene Bs. 14000 y una tercera tiene Bs. 18000 en billetes de banco de la misma denominación y del mayor valor posible ¿Cuánto vale cada billete y cuántos tiene cada persona?

5. Dos cintas de 36m y 48m de longitud respectivamente se quieren cortar en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?



6. ¿Cuál es el menor número de cuadernos que se puede repartir exactamente entre 21, 24 o 30 alumnos?

7. ¿Cuál es la menor capacidad de un depósito que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de tres llaves que vierten: la primera 10 lt por minuto; la segunda 12 lt por minuto y la tercera 30 lt por minuto?

8. El número de veces que un alumno fue a la playa durante sus tres meses de vacaciones es el menor múltiplo común de 2, 3, 4, 6, 8, 9 y 12. ¿Cuántos días fue el alumno a la playa?

9. Una campana suena con 10 segundos de intervalo entre dos repiques, otra con 20 y otra con 24 segundos de intervalo. Si dan el primer golpe simultáneamente, ¿Después de cuántos segundos volverán a coincidir los repiques?

10. Cuatro barcos, B_1, B_2, B_3 y B_4 hacen cruceros por las islas del Caribe partiendo todos del Puerto de la Mar en Margarita. El barco B_1 emplea en el trayecto de ida y vuelta 6 días; B_2 emplea 7 días; B_3 10 días y B_4 14 días. ¿Al cabo de cuántos días se vuelven a encontrar los 4 barcos en Margarita?

11. La Constitución de un país establece que los alcaldes se eligen cada 4 años, los gobernadores cada 3 años y el presidente cada 6 años. Si en 1998 coincidieron todas las elecciones. ¿En qué año vuelven a coincidir?

12. Tres perros arrancan juntos en una carrera en la que la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 11 segundos y el tercero 12 segundos. ¿Al cabo de cuántos segundos pasaran juntos por la línea de salida y cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo?

13. Se desea colocar cerámica en un baño que mide 300 cm x 120 cm x 180 cm. Si se quiere evitar cortar baldosas, y se dispone de los siguientes formatos: 20 cm x 20 cm; 45 cm x 45 cm; 60 cm x 60 cm; 180 cm x 180 cm. ¿Cuál conviene elegir que sea del mayor tamaño posible?

14. En una caja de 500 cm de largo, 160 cm de ancho y 100 cm de alto caben un número exacto de cubos de lado x . ¿Cuánto vale x si se quiere que sea del mayor tamaño posible?

15. Se tienen tres extensiones de terreno de 3675 m^2 , 1575 m^2 y 2275 m^2 respectivamente y se quieren dividir en parcelas de igual extensión. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada extensión de terreno sea el menor posible?

16. Se tienen tres cajas que contienen 1600 kg., 2000 kg. y 3392 kg. de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos hay en cada caja?



3. Razones y Proporciones. Porcentaje. Regla de Tres.

Razón

Un par de números que indican un determinado cociente entre dos magnitudes se denominan razón. Ejemplo: $\frac{120}{30}$, $\frac{3}{6}$...

El concepto de razón es muy útil ya que se encuentra presente en muchas situaciones de la vida diaria. En una Universidad: la razón entre alumnos y profesores la razón entre mujeres y hombres, la razón entre profesores y personal administrativo.

Proporción

Dos o más razones iguales forman una proporción. Ejemplo: $\frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{36}{18} = \frac{48}{24}$

Se lee "12 es a 6 como 24 es a 12". También suele escribirse $12 : 6 :: 24 : 12$

En la proporción $\frac{36}{18} = \frac{48}{24}$, 36 y 24 se denominan *extremos* y 18 y 48 se denominan *medios*.

En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos, es decir, $a \cdot d = b \cdot c$. Y también se verifica

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Porcentaje

Se llama **Tanto Por Ciento** de un número (se denota %) a una o varias de las cien partes iguales en que se divide dicho número.

Decir 5% de una cantidad, es tomar $\frac{5}{100}$ ó 0,05 de ella.

El porcentaje se puede escribir utilizando notación fraccionaria o decimal:

$$5\% = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$50\% = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$\frac{1}{2}\% = \frac{\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{200} = 0,005$$



Ejemplo:

- ¿Qué significa el 5% de 200?

Solución:

5% de 200 significa que 200 se ha dividido en 100 partes iguales (cada una vale 2) y se toman 5 de ellas, es decir 10. Luego, 5% de 200 es 10 .

$\frac{1}{2}$ % de 400 significa que 400 se ha dividido en 100 partes iguales (cada una es 4) y se toma $\frac{1}{2}$ de ellas, es decir 2.

Aumentos o disminuciones sucesivas expresadas en porcentaje

Es frecuente en las actividades de compra y venta realizar descuentos sucesivos. Si p_0 es el precio original de un producto y $x_1\%$, $x_2\%$ son dos descuentos sucesivos, entonces el precio final p_f del producto es:

$$p_f = p_0 \cdot \frac{(100 - x_1)}{100} \cdot \frac{(100 - x_2)}{100}$$

Si $x_1\%$ y $x_2\%$ son aumentos sucesivos, el precio final p_f se expresa así:

$$p_f = p_0 \cdot \frac{(100 + x_1)}{100} \cdot \frac{(100 + x_2)}{100}$$

Práctica IV

1. De los 5000,00 Bs. que tenía gasté el 85 %. ¿Cuánto me queda?
2. Si el 80% del área de un rectángulo es 60m^2 , entonces ¿cuál es el área del rectángulo?
3. Un campesino vende el 63 % de sus gallinas y se queda con 74 gallinas. ¿Cuántas gallinas tenía?
4. Si Pedro tuviera un 15 % menos de la edad que tiene, tendría 34 años. ¿Cual es su edad actual?
5. Efectuar dos descuentos consecutivos, primero de un 10% y luego de un 20%, ¿es equivalente a efectuar un solo descuento de qué porcentaje?
6. ¿De qué número es 12 el 8 %?



7. ¿De qué número es 20 el 0,05%?
8. La diferencia entre el 8% y el 5% de un número es 40. Calcular dicho número
9. ¿Qué porcentaje es 130 de 2600?
10. La calidad del oro se mide en quilates, que son veinticuatroavos del peso. El oro de 18 quilates contiene $\frac{18}{24}$ de oro puro. ¿Cuál es el tanto por ciento de oro puro en una cadena de 18 quilates?
11. Se tienen 9 litros de una loción de afeitar que contiene un 50% de alcohol. ¿Cuál es el número de litros de agua necesarios para convertirla en una loción que contenga un 30% de alcohol?
12. Un estudiante presenta un examen de 25 preguntas. El puntaje es obtenido asignando 4 puntos a cada respuesta correcta y restando un punto por cada respuesta incorrecta. Si el estudiante obtiene una nota que es el 70% del puntaje máximo. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?
13. Uno de los lados de un rectángulo mide 60 unidades y el otro 40 unidades. Si los lados menores aumentan su longitud un 60% ¿Cuánto debe ser la medida de los otros lados para que el perímetro no cambie?
14. Determine el 20 % del 40% de 50.
15. ¿Cuánto vale x, si el 10% del x % de 300 es 60?
16. El 70% de los habitantes de un país habla un idioma y el 60% de la misma población habla otro idioma. ¿ Qué porcentaje de la población habla los dos idiomas, sabiendo que cada habitante habla al menos uno de ellos?
17. ¿Cuánto cuesta el almuerzo si el recibo es por Bs. 23000 y están incluidos el 10% de servicio y el 5% de cubierto?
18. La base de un triángulo mide 100 unidades y la altura 60 unidades. Si la longitud de la base disminuye en un 20% En qué porcentaje debe aumentar la altura para que el área no cambie?
19. Las pasas obtenidas al secar una cantidad de uvas pesan el 32% del total del peso de las uvas. ¿Qué cantidad de uvas se debe secar para obtener 2Kg. de pasas?
20. Si un brillante de 2 kilates vale Bs. 16000. ¿ Cuánto valdrá un brillante de 8 kilates, sabiendo que el valor de un brillante es proporcional al cuadrado del número de kilates?.
21. Las edades de Alvaro y Luis son 10 y 15 años respectivamente. ¿Cuál será la razón de sus edades dentro de 5 años?.



22. Las edades de dos personas son 18 y 27 años. ¿Dentro de cuántos años dichas edades estarán en la razón de 3/4?

23. Pedro le dice a Pablo: “La razón entre los caramelos que tengo y los que tú tienes es 3:2. Si te regalo 10 caramelos la razón se invierte. ¿Cuántos caramelos tiene Pablo?”

24. Jesús prepara una paella en 45 minutos. Eisten tarda 60 minutos en hacer dicha paella y a Yelitza le lleva hacerla 50 minutos. ¿En cuánto tiempo harán la paella si trabajan juntos?

25. Ana y Luisa realizan un trabajo por el cual cobran Bs. 1500000. Si Ana cobra 2/5 de lo que cobra Luisa. ¿Cuánto cobra Luisa?

26. En un curso de Biología, el 30% del curso obtuvo la calificación A, el 20% logró B, un 10% C y el resto logró D. Si esta información se representa en un diagrama circular de radio 10 cm, ¿cuál es el área del sector circular que representa los que logran A?

Regla de tres

Es una forma práctica de plantear un problema de proporciones cuando se conocen tres términos (o más) y se requiere calcular el cuarto término (el quinto, etc).

La regla de tres puede ser Simple o Compuesta, según el número de variables que intervengan. Si intervienen sólo dos (2) variables se trata de una Regla de Tres Simple. Si intervienen tres (3) o más variables, es una Regla de Tres Compuesta.

La Regla de Tres Simple puede ser directa o inversa, según las variables involucradas sean directa o inversamente proporcionales respectivamente. Dos o más variables son directamente proporcionales si al aumentar (o disminuir) una de ellas, la(s) otra(s) también aumenta(n) (o disminuye) proporcionalmente. Y son inversamente proporcionales si al aumentar el valor de magnitud de una de las variables, disminuye proporcionalmente el valor o los valores de la(s) otra(s) variable(s) o viceversa.

Regla de tres simple directa

Ejemplo:

• Un acuario contiene 9 litros de agua. El nivel del agua llega a una altura de 10,8 cm. ¿A qué altura llega el nivel del agua si en el acuario se encuentran 15 litros de agua?

Solución: Usualmente se plantea el problema así:

9 l.	_____	10,8 cm
15 l	_____	x

$$x = \frac{15 \text{ l} \cdot 10,8 \text{ cm}}{9 \text{ l}} = 18 \text{ cm}$$

La altura del agua llegaría a 18 cm.



Otras formas de resolverlo:

- ♦ Como una proporción de variables directamente proporcionales: $\frac{9}{15} = \frac{10,8}{x}$
- ♦ Como un problema de multiplicación y adición: si dividimos 10,8 cm. entre 9 lt obtendremos el número de centímetros de nivel que corresponden a un 1 litro $\left(\frac{10,8 \text{ cm}}{9 \text{ l}} = 1,2 \text{ cm/l}\right)$. Como se tienen 15 lt., al multiplicar $15 \text{ l} \cdot 1,2 \text{ cm/l} = 18 \text{ cm}$

Regla de tres simple inversa

Ejemplo:

- Una cuadrilla de obreros ha hecho una obra en 30 días trabajando 6 horas diarias. ¿En cuántos días la habrían terminado si hubieran trabajado 10 horas diarias?

Solución: Usualmente se plantea el problema así:
$$\begin{array}{r} 6 \text{ horas} \quad \text{—————} \quad 30 \text{ días} \\ 10 \text{ horas} \quad \text{—————} \quad x \end{array}$$

$$x = \frac{6 \text{ h} \cdot 30 \text{ días}}{10 \text{ h}} = 18 \text{ días}$$

Otras formas de resolverlo:

- ♦ Como una proporción de variables inversamente proporcionales: $\frac{6}{10} = \frac{x}{30}$
- ♦ Como un problema de multiplicación y adición: si trabajaron 6 horas diarias en 30 días, entonces trabajaron un total de 180 horas. Si dividimos este número entre 10 horas se obtendrá el número de días que se necesitan trabajar:

$$x = \frac{6 \text{ h} \cdot 30 \text{ días}}{10 \text{ h}} = 18 \text{ días}$$

Práctica V

1. Si 4 cachorritos consumen 9 Kg. de alimento por semana. ¿Cuántos Kg. debemos comprar para alimentar durante una semana a 12 cachorritos?
2. Si 4 litros de jugo cuestan 8.000,00 Bs. ¿Cuánto costarán 15 litros de jugo?
3. Si 4 hombres hacen una pared en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacerla 6 hombres?
4. Dos grifos vacían un tanque de agua en 24 horas. ¿Cuántas horas serán necesarias para vaciar el tanque si abrimos 6 grifos?



(- debajo y + encima si son inversamente proporcionales; + debajo y - encima si son directamente proporcionales).

$$\text{Finalmente: } x = \frac{10 \text{ hom.} \cdot 5d \cdot 4h}{6 \text{ hom.} \cdot 3h} = \frac{200d}{18} = \frac{100d}{9} = 11\frac{1}{9} \text{ días}$$

Es decir, se necesitan $11\frac{1}{9}$ días.

Práctica VI

1. Si 4 hombres construyen 330 metros de pared en 11 días, ¿en cuántos días 6 hombres construirán 360 metros?

2. Se paga Bs. 59.000,00 por el transporte de 420 kg. de mercancías a una distancia de 650 km. ¿Cuánto se pagará por el transporte de 1.260 kg. de la misma mercancía a una distancia de 760 km?

3. En un internado de 145 alumnos se consumen 870 kg de pan en 8 días. ¿Cuántos kilogramos de pan en 10 días se consumirían si el internado tuviera 612 alumnos?

4. ¿Cuántos días tendrá que trabajar un obrero, a razón de 5 horas diarias, para ganar Bs. 320.000,00, si por trabajar 6 horas diarias durante 10 días recibe Bs. 240.000,00?

5. Una calle de 50m de largo y 8m de ancho se encuentra pavimentada con 20.000 baldosas. ¿Cuántas baldosas serán necesarias para pavimentar otra calle de doble largo y cuyo ancho es los $\frac{3}{4}$ del ancho anterior?

6. Veinticinco hombres pavimentan 150 Km de una carretera en 12 días trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántas horas deben trabajar 18 hombres para pavimentar 180 Km en 15 días?.



Respuestas

Práctica I

2. $-2,5 < -1 < -\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{2} < \frac{8}{3} < 2\sqrt{3}$
3. $\frac{8}{5}$
4. $\frac{7}{3}$
5. $\frac{7}{5}$
6. $\sqrt[4]{4}$
7. a) 7 ; b) -148
8. a) $\frac{52}{137}$; b) $-\frac{11}{102}$; c) $\frac{1}{5}$ d) $-\frac{59}{78}$ e) $\frac{5}{16}$ f) $\frac{7}{18}$
9. a) 33 b) $-\frac{27}{64}$ c) $-\frac{729}{125}$ d) ± 9 ;
e) -2 f) -7 g) 125 h) $\frac{1}{81}$
i) $5\sqrt{2} - 20\sqrt{5}$ j) $\frac{2^{29}}{3^{26}}$ k) 18 l) 4
m) $23 \cdot 10^6$ n) $\frac{6}{5}$; o) $(s-t)^{-1}$ p) $\frac{a^2b^2}{b^3-a^3}$
q) $\frac{2^{15} - 3^5}{(2^9 - 3^3) \cdot 2^2}$ r) $-\frac{2\sqrt[3]{11}+1}{9+2\sqrt{6}}$ s) $\frac{16}{3}$ t) $5\sqrt{15} - \sqrt{6} - 21$
u) $23 - 6\sqrt{10}$ v) $\frac{36 - 5\sqrt{77}}{17}$ w) $-2\sqrt{2} + 4$
x) $2\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 10\sqrt[3]{\frac{1}{25}} + 30\sqrt[3]{4}$
10. a) -17 b) $\frac{1}{26}$ c) 63 d) $\frac{1}{243}$
11. a) $-10ab^4c$ b) y^6x^{-12} c) $\frac{2s^5}{5r^{12}}$ d) $2x^2y \cdot \sqrt[3]{x}$
e) $\frac{x^2b^2}{a^2y^2}$ f) c^2d^2 g) $x^{12}\sqrt{x^5y^{10}}$ h) $\frac{x^2y^2\sqrt{x^2y^4z^3}}{z}$
i) 5d



- | | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|----------------------|
| 12. 21 | 13. 21 | 14. 20 horas | 15. 144 días |
| 16. 8 veces | 17. x^2 veces | 18. 90 páginas | 19. $\frac{2p+q}{3}$ |
| 20. $533,3 m^2$ | 21. 8 | 22. Sólo uno | 23. $\frac{5}{2}$ |

Práctica II

- | | | | | |
|-------|------|--------------|-------|-------|
| 2. 24 | 3. 6 | 4. 19 | 5. 24 | 6. 10 |
| 7. 5 | 8. 3 | 9. 987654312 | 10. 7 | 11. 4 |

Práctica III

- a) m.c.m= 1344; M.C.D= 4;
c) m.c.m= 11550, M.C.D= 1
- b) m.c.m= 134820; M.C.D= 6;
d) m.c.m.= $9a^5b^4$; M.C.D.= a^2b
- Sólo 1.
- 50cm.
- Cada billete es de Bs. 2000; 4 billetes, 7 billetes, 9 billetes
- 12m
- 840 cuadernos
- 60l
- 72 días
- 120s
- 210 días
- 2010
- 660s; 66 vueltas, 60 vueltas, 55 vueltas
- 60cm x 60cm
- 20cm
- $175m^2$



16. 16Kg. cada bloque; 100 bloques, 125 bloques, 212 bloques

Práctica IV

- | | | | |
|---------------|----------------------------|------------------|---------------------------|
| 1. Bs. 750 | 2. 75m^2 | 3. 200 gallinas | 4. 40 años |
| 5. 28% | 6. 150 | 7. 40.000 | 8. 1333,3 |
| 9. 5% | 10. 75% | 11. 6 litros | 12. 19 |
| 13. 36 | 14. 4 | 15. $x = 200$ | 16. 30% |
| 17. Bs. 20000 | 18. 25% | 19. 6,25 Kg. | 20. 256000Bs |
| 21. $3/4$ | 22. 9 años | 23. 20 caramelos | 24. $\frac{900}{53}$ min. |
| 25. Bs 42.858 | 26. $30\pi \text{ cm}^2$. | | |

Práctica V

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------|---------------|
| 1. 27 kg | 2. Bs. 30.000,00 | 3. 8 días |
| 4. 8 horas | 5. $28\frac{1}{8}$ hojas | 6. 36,41 días |
| 7. 48m | 8. 7,5 horas / día | 9. 9 días |
| 10. $5\frac{1}{2}$ horas menos | | |

Práctica VI

- | | | |
|------------|--------------------|-------------|
| 1. 8 días | 2. Bs. 206.953,84 | 3. 4.590 kg |
| 4. 16 días | 5. 30.000 baldosas | 6. 8 horas |



Autoevaluación

- Si todos los números enteros son números reales, entonces es cierto que:
 - Todos los reales son enteros.
 - Algunos enteros son reales.
 - Ningún entero es real.
 - Algunos reales son enteros.
- ¿Cuál de las siguientes fracciones es más próxima a $\frac{1}{2}$?
 - $\frac{5}{12}$
 - $\frac{8}{15}$
 - $\frac{11}{20}$
 - $\frac{7}{16}$
- Al efectuar $-\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ se obtiene como resultado:
 - 25
 - 25
 - $-\frac{1}{25}$
 - $\frac{1}{25}$
- La suma de los primeros n enteros positivos pares es p y la suma de los primeros n enteros positivos impares es q . Entonces $p-q$ es igual a:
 - 1
 - n
 - $-n$
 - $\frac{n}{2}$
- Si un número x es divisible por 3, ¿cuál de las siguientes expresiones es divisible por 3?
 - $x+1$
 - $x+5$
 - $x+6$
 - $x+7$
- Para que el número 5324A sea divisible entre 3, 6 y 9, la cifra "A" debe ser:
 - 0
 - 4
 - 6
 - 8
- ¿Cuál es el porcentaje de números naturales que hay entre 7 y 26, ambos inclusive, que son múltiplos de 5?
 - 4%
 - 8%
 - 20%
 - 25%
- El 10% de una cantidad es igual al 25% de 16. ¿Cuál es esa cantidad?
 - 100
 - 80
 - 40
 - 24



9. Nueve hombres pueden hacer una obra en 5 días. ¿Cuántos hombres más hacen falta para hacer la obra en un día?

- a) 3 hombres más
b) 11 hombres más
c) 26 hombres más
d) 36 hombres más

10. Se emplean 14 hombres para hacer 45 metros de una obra, trabajando durante 20 días. ¿Cuánto tiempo empleará la mitad de esos hombres en hacer 16 metros de la misma obra, presentando esta obra el triple de dificultad que la anterior?

- a) $36\frac{1}{3}$
b) $38\frac{3}{4}$
c) $40\frac{2}{3}$
d) $42\frac{2}{3}$

11. El dinero que tienen dos personas están en la razón 4:5 y una de ellas tiene Bs. 20000 más que la otra. ¿Cuánto dinero tienen entre las dos?.

- a) Bs.80000
b) Bs.90000
c) Bs.100000
d) Bs.180000

12. Los ángulos interiores de un triángulo son entre sí como 2:3:4. ¿Cuál es la medida del ángulo menor?.

- a) 10°
b) 20°
c) 40°
d) 60°

13. Un trabajador A puede pulir un carro en 8 horas, otro trabajador B en 7 horas y otro C en 10 horas. ¿En cuántas horas pueden hacer el trabajo los tres juntos?.

- a) $\frac{103}{280}$
b) $\frac{280}{103}$
c) $\frac{25}{3}$
d) $\frac{3}{25}$

14. Cuando un número natural se divide entre 15 el residuo es 7. Al sumar los residuos que se obtienen al dividir dicho número natural entre 3 y entre 5 dá como resultado:

- a) 3
b) 5
c) 7
d) 4

15. ¿Cuál es el valor de a en la expresión: $\sqrt{1+\sqrt{3-\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{a}}}}} = 1$?

- a) 4096
b) 3600
c) 1
d) 3844