CAPÍTULO III

Contenidos:

1. Concepto de función. Dominio. Rango. Representación gráfica.
2. Función Afín. Pendiente de una recta. Función Valor Absoluto.
3. Función Cuadrática.
4. Inecuaciones de Primer Grado y de Segundo Grado con una incógnita. Inecuaciones que se reducen a ellas.
5. Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Interpretación geométrica.
6. Respuestas de las Prácticas.
7. Autoevaluación.

<u>Distribución de contenidos por clase:</u>

Clase 1: Contenidos 1 y 2

Clase 2: Contenidos 3 y 4

Clase 3: Contenidos 4 y 5

1. Concepto de función. Dominio. Rango. Representación gráfica

Las funciones son un tipo específico de relaciones entre los elementos de dos conjuntos, que juegan un papel clave en Matemáticas.

Definición:

Una relación, que se denota f, entre elementos de un conjunto A y elementos de un conjunto B es una función de A en B si *para todo elemento* $x \in A$ existe *un único elemento* $y \in B$ tal que "y" es la imagen de "x" por la función f. Se escribe $y = f(x)$.

Se acostumbra a decir que "x" es la *variable independiente* e "y" la *variable dependiente*.

Para denotar la función f:
$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ x &\to f(x) = y \end{aligned}$$

El conjunto A es el dominio de la función y se denota $D_f = A$. El conjunto B es el conjunto de llegada.

El rango de la función f es el conjunto de las imágenes; es decir $R_f = \{ y \in B \mid \exists\, x \in A \wedge f(x) = y \}$.

Ejemplos:

- Sean los conjuntos A y B definidos así: $A = B = \{ x \mid x \text{ es un ser humano} \}$

Sea la relación R definida así:

R: a cada ser humano lo relacionamos con su o sus hermano(s). Estudiar si la relación *R* es una función.

<u>*Solución:*</u>

Esta relación no es una función pues existen seres humanos que no tienen hermanos y otros que tienen más de un hermano.

- Sea A el conjunto de las figuras geométricas que son cuadrados y B el conjunto de los números reales. Se define la relación g entre los elementos de A y B así: a cada cuadrado se le asocia su área. Se escribe:

$$\begin{aligned} g &: A \to B \\ x &\to g(x) = \text{ área del cuadrado} \end{aligned}$$

Estudiar si g es una función.

<u>*Solución:*</u>

Esta relación es una función ya que a cada cuadrado le corresponde su área, que es un número real positivo.

- Sea $A = B = \mathbb{N}$ y se define la relación h así: a cada número natural le asocia su doble. Se escribe:

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \to h(x) = 2x$$

$h(x) = 2x$ es la imagen de x por la función x. Estudiar si h es una función.

<u>*Solución*</u>*:*

Esta relación es una función porque cada número natural tiene un único doble.

***<u>Notas</u>*:**

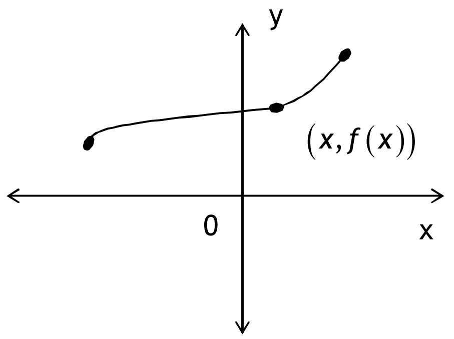
♦ Con frecuencia decimos: "consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ...". En realidad $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no es la función, es la imagen que le corresponde a x por la función f.

♦ Cuando se dice "se considera la función f definida por $f(x) = \sqrt{x-2}$", sin aclarar el dominio de definición, se debe considerar como dominio el más grande subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que sea posible calcular $f(x)$.

Las funciones que más nos interesa estudiar son las <u>*funciones reales a variable real*</u> que son aquellas cuyo <u>*dominio*</u> y <u>*rango*</u> es el conjunto de los números reales o un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Representación gráfica de una función

<u>*Definición*</u>: Fijado un sistema de coordenadas en el plano P, la representación gráfica de una función f (o curva representativa de f) *está dada por el conjunto de puntos* P (x, y) del plano cuyas coordenadas (x, y) verifican $y = f(x)$.

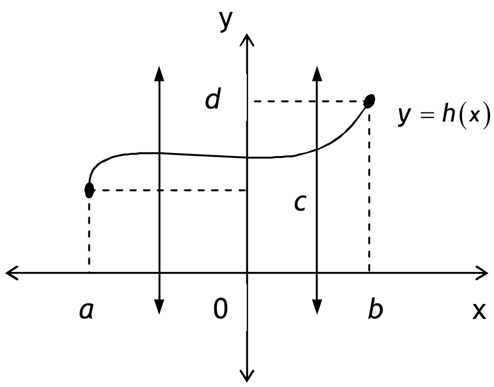


¿Cómo se reconoce si una gráfica dada representa una función?

Se trazan rectas paralelas al eje y, estas deben cortar a la gráfica *a lo sumo en un punto* (ya que la imagen es única).

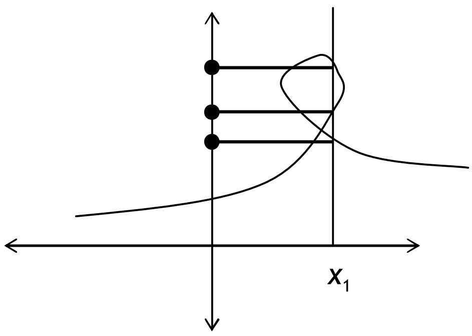
Ejemplos:

- La siguiente gráfica



Corresponde a una función, pues cualquier recta paralela al eje y la corta en un único punto; es decir, cada elemento del dominio tiene una única imagen.
$D_h = [a,b]$, $R_h = [c,d]$

- La gráfica



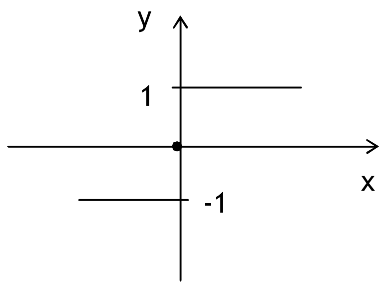
<u>*No*</u> representa una función; existe al menos una recta paralela al eje y que corta la gráfica en varios puntos; es decir, que un valor x tiene varias imágenes.

- Representar gráficamente la función signo definida por:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to h(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

<u>*Solución*</u>*:*

Se observa que $D_h = \mathbb{R}$ y $R_h = \{1 , 0 , -1\}$ y su gráfico es



- Representar gráficamente la función parte entera

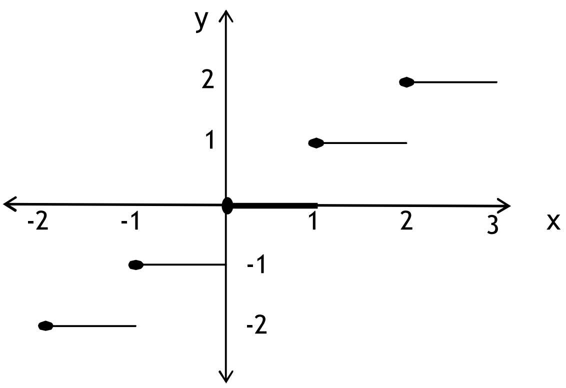
<u>Solución</u>:

La parte entera de un número real x es el mayor entero menor o igual a x. Se denota:

$$e: □ \longrightarrow □$$
$$x \to e(x) = [x] = n \quad \text{con} \quad n \le x < n+1$$

Por ejemplo: Si $0 \le x < 1$ entonces $[x] = 0$
Si $1 \le x < 2$ entonces $[x] = 1$
Si $2 \le x < 3$ entonces $[x] = 2$
Si $-1 \le x < 0$ entonces $[x] = -1$
Si $-1 \le x < -2$ entonces $[x] = -2$

Luego, su gráfica es:



$\boxed{D_e = □ \qquad R_e = □}$

Práctica I:

1. Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas y situar los siguientes puntos:

a) $\left(-\frac{5}{3}, 2\right)$ **b)** $\left(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\right)$ **c)** $(\pi, -3)$

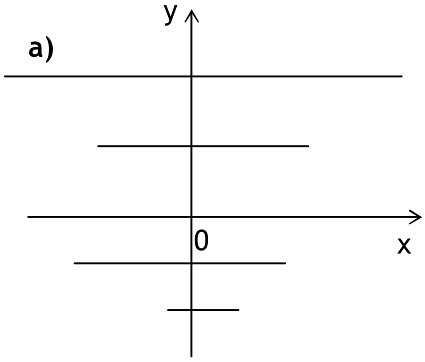
d) $(|b|, b)$ **e)** $\left(m, \sqrt{m^2}\right)$

2. Sea $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de B x B definen una función?

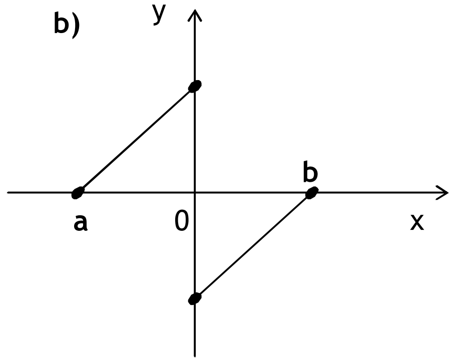
a) $G = \{(1,1), (1,2), (5,1), (6,2)\}$
b) $G = \{(4,2), (2,4), (3,1), (1,3), (5,6), (6,5)\}$
c) $G = \{(1,4), (6,1), (3,2), (2,1), (5,3), (4,1)\}$

3. Indicar cuáles de las siguientes gráficas representan funciones de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subseteq \mathbb{R}$

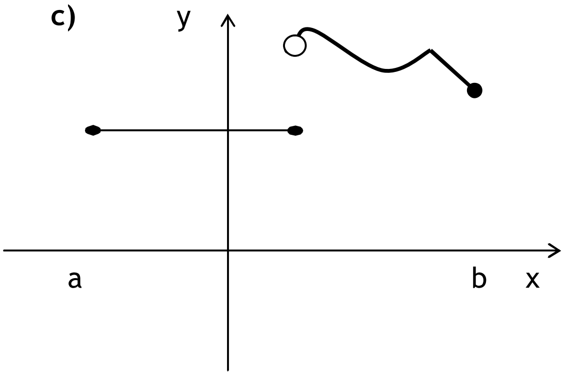
a)



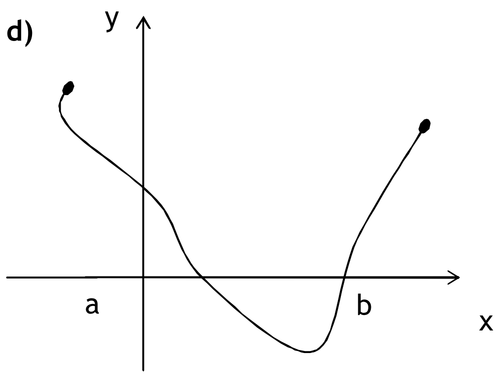
b)



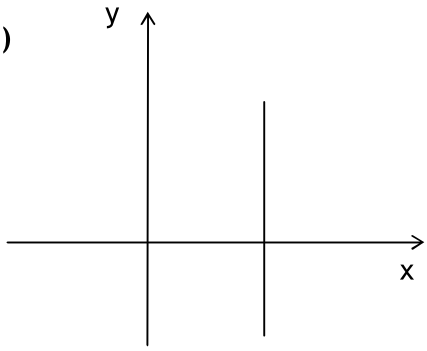
c)



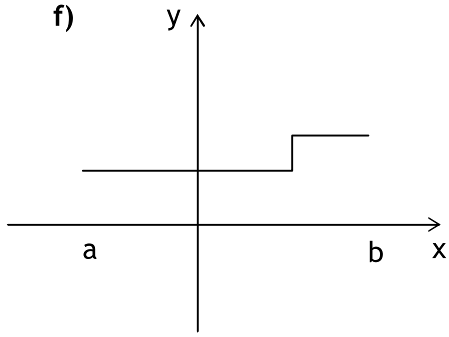
d)



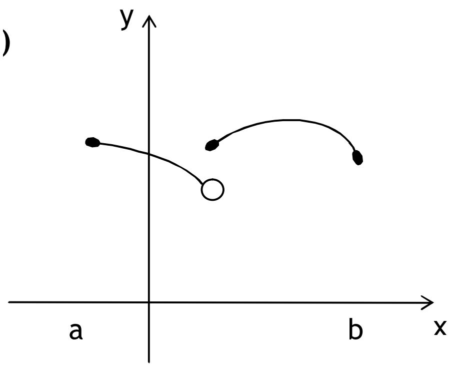
e)



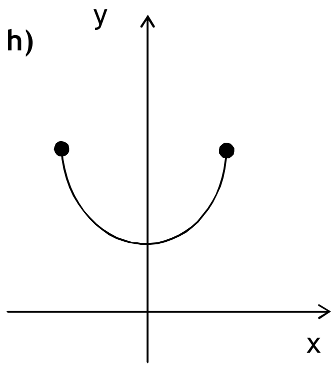
f)



g)



h)



4. Dadas las funciones *f, g, h* definidas por $f(x)=3x^2+5$, $g(x)=\dfrac{3x+4}{-2x+5}$, $h(x)=\sqrt{7x-6}$. Hallar, si es posible:

a) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

b) $g(-3)$

c) $g\left(\frac{5}{2}\right)$

d) $h(5)$

e) $h(-2)$

f) $f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

g) $\dfrac{f(1)+f(-1)}{3}$

h) $(gof)(5)=g(f(5))$

i) $(fog)(5)=f(g(5))$

j) $(gofoh)(1)=g(f(h(1)))$

5. Sea la función $g(x)=\begin{cases}5 & \text{si } x\le 0\\ 5x-2 & \text{si } x>0\end{cases}$. Calcular:

a) $g(-2)$

b) $g(2)$

c) $g\left(g\left(\frac{1}{5}\right)\right)$

d) $g(0)$

e) $\dfrac{g(-1)+g(2)}{2}$

6. Sea $h(x)=x^2-2x$ demostrar que:

a) $h(1+x)=h(1-x)\quad \forall x\in \mathbb{R}$

b) $h(x)\ge -1\quad \forall x\in \mathbb{R}$

7. Sea $g(x)=\dfrac{x+b}{x-b}$. Calcular:

a) $g(a+b)$

b) $g\left(\frac{1}{b}\right)$

c) $g(a)+g(b)$

8. Exprese analíticamente las siguientes funciones:

a) A cada número real se le asigna su cubo.

b) A cada número real positivo o nulo se le asigna su cuadrado y en cualquier otro caso se le asigna 1.

c) Para triángulos rectángulos de hipotenusa constante *c = 4*, expresar la longitud del cateto "*b*" en función de la del cateto "*a*".

d) Para cilindros de volumen constante *V = 1* determine la función que expresa el radio *r* en función de la altura h. Calcule el radio para *h = 0,5*.

2. Función Afín. Pendiente de una recta. Función Valor Absoluto.

Definición:

- La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to y = f(x) = ax + b$ recibe el nombre de función afín o función polinomio de primer grado.

Si $a = 0$, entonces $f(x) = b$ y se denomina función constante.

Si $b = 0$, entonces $f(x) = ax$ y se denomina función lineal.

Ejemplos:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to y = f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to y = h(x) = -4x$

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to y = g(x) = -5$

- $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to y = t(x) = mx - 2$ $\quad m$ parámetro real

Algunas propiedades de la función afín

- Dominio: Es el conjunto $\mathbb{R}$. Si f es una función afín, se escribe $D_f = \mathbb{R}$.

- Rango: Si $a = 0$, entonces $f(x) = b$ y el rango de f es $R_f = \{b\}$.

Si $a \neq 0$ y $f(x) = ax + b$, se despeja "$f(x)$" en función de "x": $x = \frac{f(x) - b}{a}$

Se observa que cualquiera que sea $f(x)$ real, al que usualmente identificamos por "y", se puede hallar un x tal que $f(x) = ax + b$, luego $R_f = \mathbb{R}$.

Representación Gráfica:

La representación gráfica (curva o gráfico) de la función afín en un sistema de coordenadas cartesianas $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ es el conjunto de los puntos $P(x,y)$ del plano tal que $y = ax + b$, con $f(x) = y$ o también $y - ax - b = 0$, *que representa la ecuación de una recta.*

Para dibujar una recta basta determinar dos puntos cualesquiera, aunque en muchos casos los más convenientes son los puntos de corte con los ejes de coordenadas, si ellos existen. Sea $f(x) = ax + b$, los puntos de corte con los ejes son:

Intersección eje y: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = b; \quad P(0,b)$

Intersección eje x: $f(x) = y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{b}{a}, \quad a \neq 0; \quad Q\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$

Ejemplos:

- Representar gráficamente $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{1}{3}x - 2 = y$$

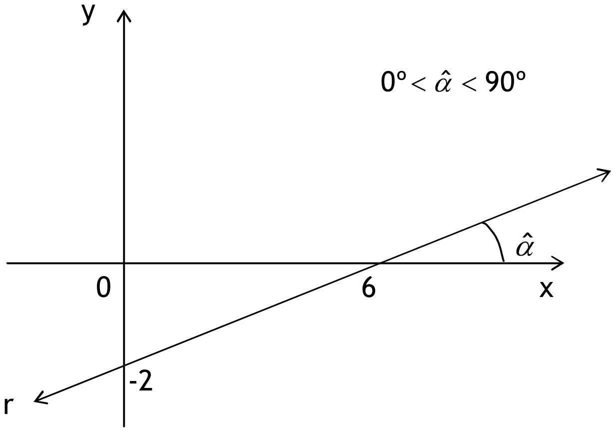
Solución:

Intersección con los ejes de coordenadas:

eje y: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = -2; \quad P(0,-2)$

eje x: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6; \quad Q(6,0)$

Representación gráfica:



$\hat{\alpha}$ es el ángulo que forma la recta r con el sentido positivo del eje x

El número $\frac{1}{3}$ se denomina <u>*pendiente de la recta*</u> y como $\frac{1}{3} > 0$ entonces el ángulo $\hat{\alpha}$ es menor que 90°. Además en la gráfica se observa que:

- Si $x > 6$ entonces $f(x) = \frac{1}{3}x - 2 > 0$
- Si $x < 0$ entonces $f(x) = \frac{1}{3}x - 2 < 0$

Esta información se acostumbra a resumir en una tabla que se denomina tabla de signo

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{3}x - 2$	- - - - - - - -	0	+ + + + + + +

- Representar gráficamente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $x \to h(x) = -4x$

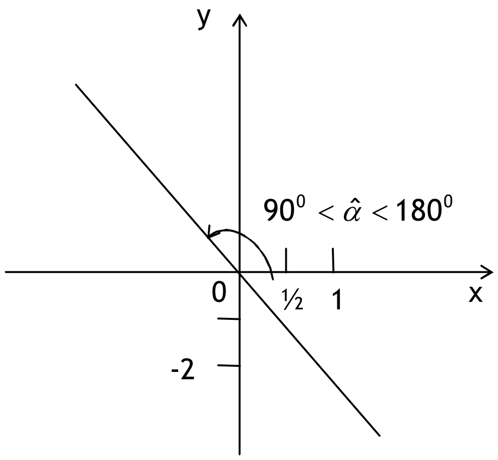
<u>*Solución*</u>*:*

Los cortes con los ejes de coordenadas son:

eje y: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0;\ P(0,0)$

eje x: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0;\ Q(0,0)$

Como pasa por el origen de coordenadas, es necesario determinar otro punto, por ejemplo: $x = \frac{1}{2}$, $y = h\left(\frac{1}{2}\right) = -2$; $T\left(\frac{1}{2}, -2\right)$



$\hat{\alpha}$: ángulo que forma la recta r con el sentido positivo del eje x.
El número -4 es la pendiente de la recta y. Como la pendiente es negativa, el ángulo $\hat{\alpha}$ es mayor de 90° y menor de 180° .

Además en la gráfica se observa que:

- Si $x < 0$ entonces $h(x) > 0$
- Si $x > 0$ entonces $h(x) < 0$

Y la tabla del signo correspondiente es:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)=-4x$	+ + + + + +	**0**	- - - - - - - - - -

Esta tabla del signo es muy útil para la resolución de inecuaciones.

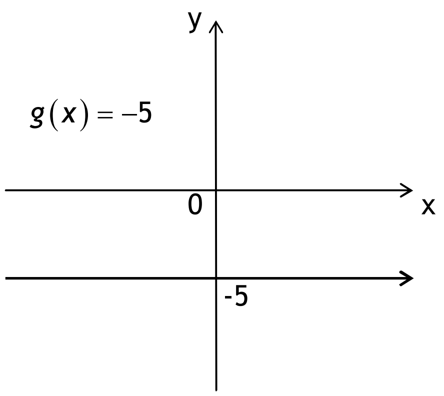
- Representar gráficamente la función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$
  $x\rightarrow g(x)=-5$

<u>Solución</u>:

Los cortes con los ejes de coordenadas son:

eje y: $x=0 \quad \Rightarrow \quad g(0)=-5;\ P(0,-5)$
eje x: $y=g(x)=-5\neq 0$, luego no corta al eje x

La gráfica es una recta paralela al eje x



Se observa que para todo $x\in\mathbb{R}$ $g(x)=-5<0$, luego la tabla del signo es:

Tabla de signo

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)=-5$	- -	

En este caso, la pendiente es $\alpha=0$ y el ángulo $\hat{\alpha}''$ que forma la recta con el sentido positivo del eje x es 0°.

En general, podemos considerar los siguientes casos para la función afín $f(x) = ax + b$

Caso 1: Si $a = 0$ Entonces $f(x) = b$ es una función constante y la representación gráfica es una recta paralela al eje x, como se indica a continuación:

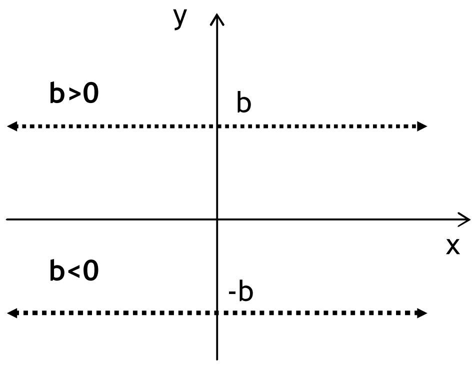


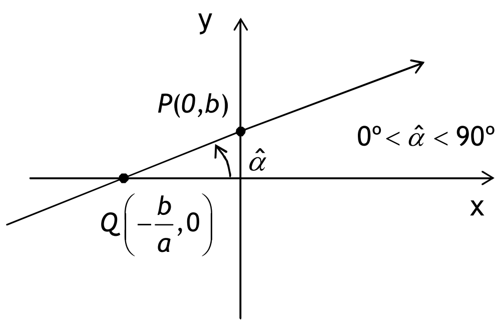
Tabla del Signo

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = b > 0$	+ + + + + + + + + + + + + + + +
$f(x) = b < 0$	- - - - - - - - - - - - - - - - - -

La pendiente de la recta es 0

Caso 2: Si $a > 0$ (pendiente positiva) y $b \neq 0$.

$f(x) = ax + b$



Caso 3: Si $a < 0$ (pendiente negativa) y $b \neq 0$.

$f(x) = ax + b$

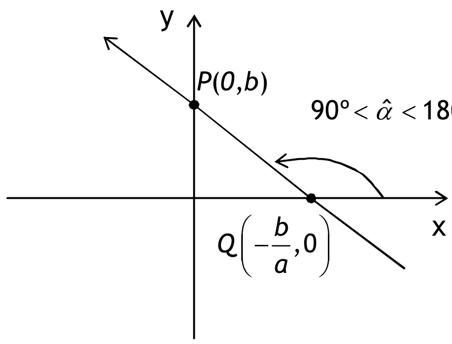


Tabla de signo para caso 2 y caso 3

x	$-\infty$ $-b/a$ $+\infty$
$f(x) = ax + b$, $a > 0$	- - - - - - - - - **0** + + + + + + + +
$f(x) = ax + b$, $a < 0$	+ + + + + + + **0** - - - - - - - - - -

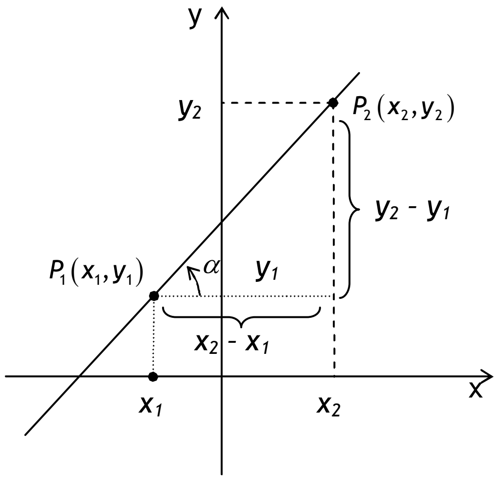
Caso particular: Si $(a>0 \text{ ó } a<0)$ y $b=0$: La recta pasa por el origen de coordenadas

Nota: Existen rectas paralelas al eje *y*, pero no están asociadas a una función.

Pendiente de una Recta

La pendiente de una recta está relacionada con su inclinación. Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos de una recta r tales que $x_1 \neq x_2$ (recta no paralela al eje y). El número $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, se denomina *pendiente de la recta r*.

Interpretación geométrica



La pendiente de una recta r es la tangente trigonométrica del ángulo $\hat{\alpha}$ que forma la recta con el semieje positivo de las *x*.

Luego: $\boxed{a=\operatorname{tg}\,\alpha}$

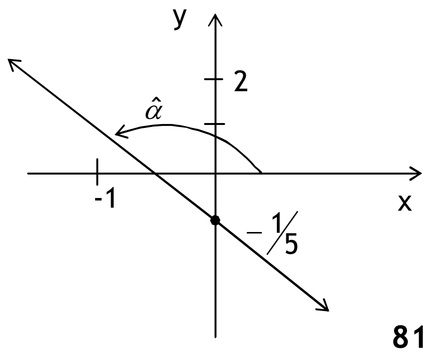
Ejemplo:

- Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1,2)$ y $\left(0,-\dfrac{1}{5}\right)$ y representar gráficamente dicha recta.

Solución:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{1}{5}-2}{0-(-1)}=-\frac{11}{2}$$

Como $a=\operatorname{tg}\,\alpha<0$ entonces $90°<\hat{\alpha}<180°$.



Se puede demostrar que la pendiente de una recta r determinada por una función afín f definida por $f(x) = ax + b$ es a. En efecto, calculemos la pendiente de r con dos puntos $P_1(x_1 \, , f(x_1))$ y $P_2(x_2 \, , f(x_2))$, $x_1 \neq x_2$

$$\text{Pendiente de } r = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

<u>Función Valor Absoluto</u>

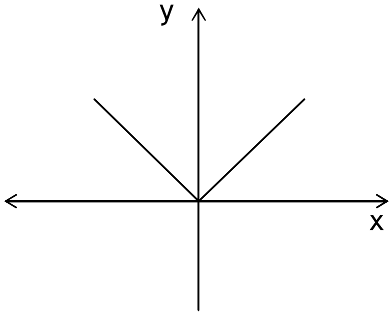
En el capítulo I se estudió la definición de valor absoluto de un número real x , según la cual a cada número real le corresponde un único real positivo o nulo.

Luego, se puede definir la función valor absoluto así:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El $D_f = \mathbb{R}$, el $R_f = [0 \, , \, +\infty)$ y su representación gráfica es:



Ejemplo:

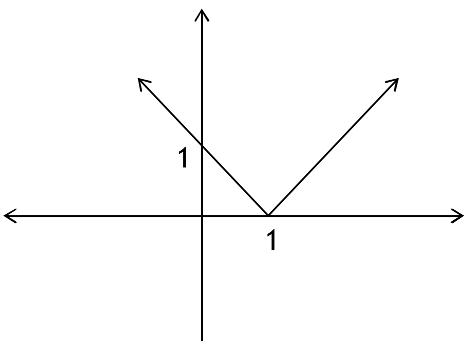
- Representar gráficamente la función g definida por: $g(x) = |x - 1|$

<u>Solución</u>:

$$g(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases}$$

Luego, $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Y su representación gráfica es:



Práctica II:

1. Trazar la gráfica de las siguientes funciones. Indicar en cada caso el dominio de la función.

a) $f(x) = -3$

b) $t(x) = -2x + \sqrt{2}$

c) $g(x) = |x| \quad x \in [-2, 2]$

d) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

e) $h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{3} & \text{si } 2 < x < 5 \\ 4 & \text{si } 5 \leq x < \sqrt{36} \end{cases}$

2. Se considera la función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = -2x - 4$$

a) Representar gráficamente f en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Utilizar la gráfica para hallar las imágenes por f de los números -3 ; 1
c) Utilizar la gráfica para hallar las pre-imágenes o antecedentes por f de los números -2; -1; 0; 1; 2.
d) Utilizar la gráfica para hallar el intervalo en el cual debe estar el número real x para que $f(x) = -2x - 4$ cumpla la condición que se indica a continuación:

(i) Positivo
(ii) Superior a -1
(iii) Inferior a 2
(iv) Que pertenezca a $[-1, 2]$

3. Trazar sobre el mismo sistema de coordenadas, la representación gráfica de las funciones f , g , h definidas así:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to f(x) = |x - 1|$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to g(x) = 2x + 1$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

4. Resolver gráficamente las ecuaciones con x la incógnita:

a) $|x - 1| = 2x + 1$ **b)** $|x - 1| = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ **c)** $|x - 2| = \left|\frac{1}{2}x - 4\right|$

5. Sean f y g funciones reales a variable real $x \in \mathbb{R}$

a) Estudiar los signos de los números $2x+1$ y $2x-1$ cuando x describe $\mathbb{R}$.

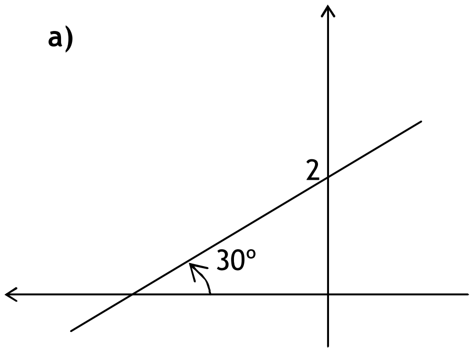
b) Representar gráficamente las funciones:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

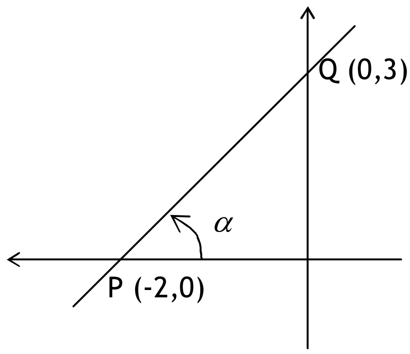
$x \to f(x) = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$ $\quad$ y $\quad$ $x \to f(x) = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1|$

6. Hallar la pendiente de las rectas de las figuras siguientes:

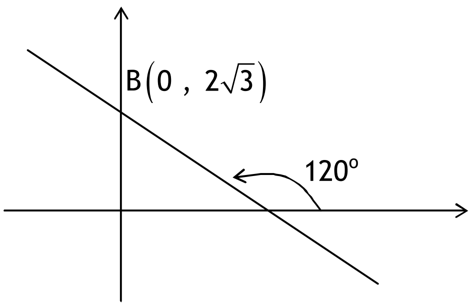
a)



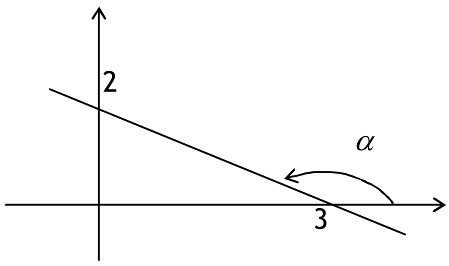
b)



c)



d)



7. Hallar las pendientes de las dos rectas que pasan por $(1,1)$ y que determinan cada una un triángulo de área $\frac{9}{4}$ en el primer cuadrante.

8. Se consideran las funciones f y g definidas por $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2,\ \ g(x) = 2x - 3$.

a) Representar gráficamente las funciones f , g.

b) Estudiar el signo de $f(x)$.

c) Utilizar la representación gráfica y determinar:

i) El número x que tiene la misma imagen por f y g.

ii) El intervalo que debe tener x para que se verifique $f(x) > g(x)$.

d) Resolver el sistema: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

3. Función Cuadrática o Función Trinomio de Segundo Grado

Definición:

La función f tal que a todo número real x asocia el número real $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c números reales $a \neq 0$, se denomina función cuadrática.

Se escribe: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \in \mathbb{R}^*, \ b, \ c \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to y = g(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x + 3$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to y = h(x) = x^2 - \frac{1}{4}x$
- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \to y = p(x) = -\frac{1}{5}x^2$

Algunas propiedades importantes:

- Dominio: Es el conjunto de los números reales, pues a cualquier número real se le puede hallar su imagen, que es otro número real. Se escribe $D_f = \mathbb{R}$.

- Rango: Dado "*y*", un número real cualquiera, se trata de hallar un valor real x tal que $f(x) = y$. Luego, es necesario despejar x:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c - y = 0$$

Para que esta ecuación tenga raíces reales en x se debe cumplir que

$$\Delta = b^2 - 4a(c - y) \geq 0.$$

Luego, $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac + 4ay \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4ay \geq 4ac - b^2$

Si $a > 0$ $\quad y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$ $\quad$ Rango de f es $R_f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty \right]$

Si $a < 0$ $\quad y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$ $\quad$ Rango de f es $R_f = \left[-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

Se denomina ___raíz o cero del trinomio___ todo valor de x para el cual $f(x)=0$. Hallar las raíces del trinomio $f(x)=ax^2+bx+c$ es determinar las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

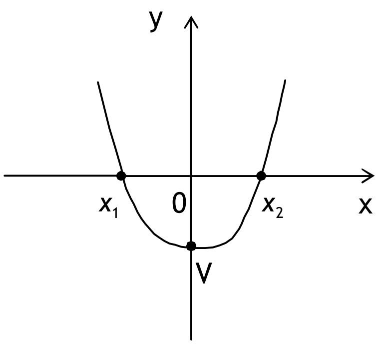
Representación gráfica:

Fijado un sistema de coordenadas cartesianas, la representación gráfica de la función cuadrática recibe el nombre de **parábola**. A continuación un resumen de los distintos casos que se presentan en la representación gráfica de la parábola según los valores de a y de Δ

a > *0* Cóncava hacia arriba

<u>CASO 1</u>: $\Delta > 0$

$$D_f=\mathbb{R},\quad R_f=\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),\infty\right),V\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$



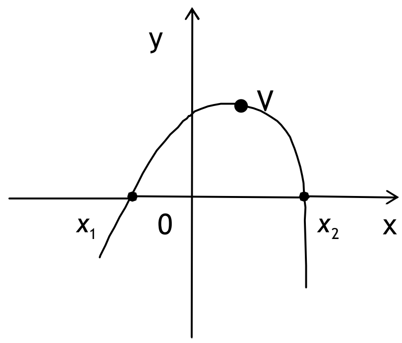
La Tabla del Signo es:

X	-∞ x1 x2 +∞
$f(x)=ax^2+bx+c$	+ + + + 0 - - - 0 + + + +

a < *0* Cóncava hacia abajo

<u>CASO 1</u>: $\Delta > 0$

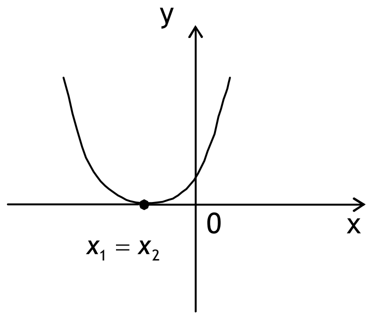
$$D_f=\mathbb{R},\quad R_f=\left(-\infty,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right],V\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$



La Tabla del Signo es

x	-∞ x1 x2 +∞
$f(x)=ax^2+bx+c$	- - - 0 + + 0 - - - - -

CASO 2: $\Delta = 0$

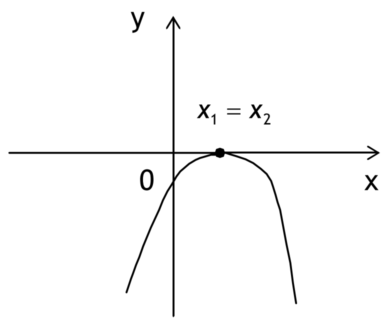


Un punto de corte con el eje x: $P(x_1, 0)$

La Tabla del Signo es:

x	$-\infty$ $\quad$ $x_1 = x_2$ $\quad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	+ + + + $\quad$ 0 $\quad$ + $\quad$ + + + +

CASO 2: $\Delta = 0$

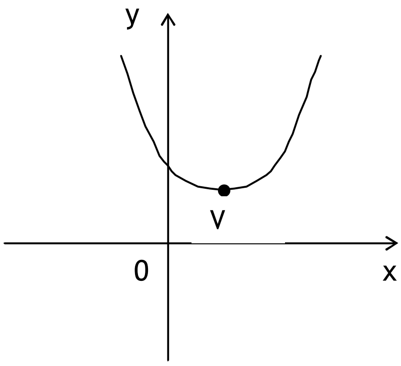


Un punto de corte con el eje x: $P(x_1, 0)$

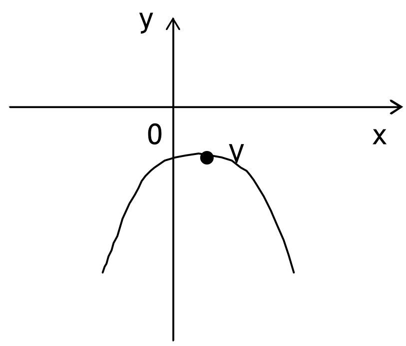
La Tabla del Signo es:

x	$-\infty$ $\quad$ $x_1 = x_2$ $\quad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	- - - - - - - 0 - - - - - - - -

CASO 3: $\Delta < 0$



CASO 3: $\Delta < 0$



No corta el eje *x*

La Tabla del Signo es:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	+ + + + + + + + + + + + + + +

La Tabla del Signo es:

X	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	- - - - - - - - - - - - - - -

Ejemplo:

- Representar gráficamente la función cuadrática *g*, definida por $g(x) = x^2 - 5x + 6$ y escribir la tabla del signo.

<u>*Solución*</u>*:*

$a = 1 > 0$, luego la parábola es cóncava hacia arriba $\bigcup$

Vértice:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \qquad g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - 5.\frac{5}{2} + 6 = \frac{25-50+24}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

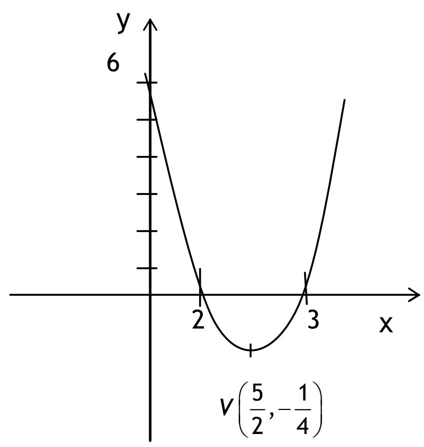
Cortes con los ejes:

eje *y*: $x = 0,\ g(0) = 6,\ P(0,6)$ Punto de corte

eje *x*: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)\ .\ (x-2) = 0 \Rightarrow x = 3 \wedge x = 2$

Puntos de corte $P(3,0)$, $Q(2,0)$

La gráfica es:



La tabla del signo es

x	$-\infty$ 2 3 $+\infty$
$g(x) = x^2 - 3x + 6$	+ + + + + 0 - - - - - -0 + + + + +

Es decir: si $x \in [2,3]$ entonces $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ y si $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ entonces $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Práctica III:

1. Representar gráficamente las funciones que se indican a continuación indicando dominio, rango, cortes con los ejes y vértice.

a) $t(x) = x^2 + 4x - 5$

b) $p(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $h(x) = (x-1)^2 - 1$

d) $f(x) = 2x^2 + 5$

e) $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

f) $m(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

2. Se dispara un proyectil desde un avión de forma tal que transcurridos t segundos la altura alcanzada viene dada por $f(t)$ pies. Si $f(t) = -t^2 + 16t + 16$ determinar:

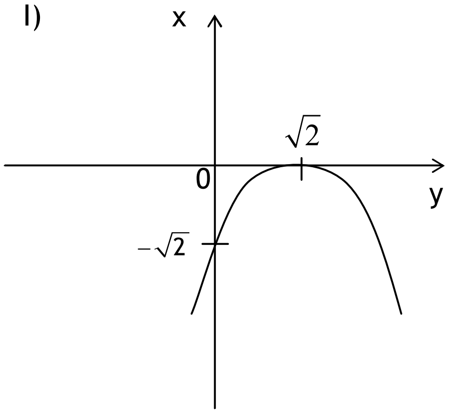
a) $f(t)$ para $t = 0$

b) Altura máxima alcanzada por el proyectil

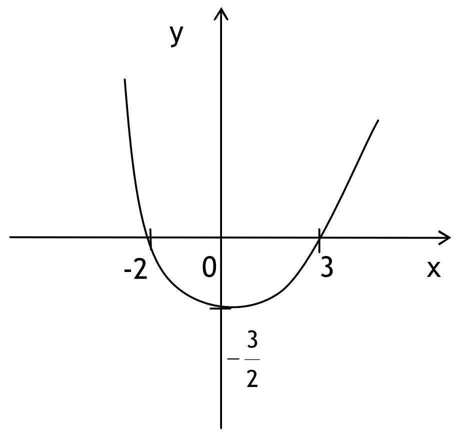
c) Gráfica de f

3. Las siguientes gráficas, identificadas por I, II y III corresponden a parábolas de ecuación $y = h(x) = ax^2 + bx + c$

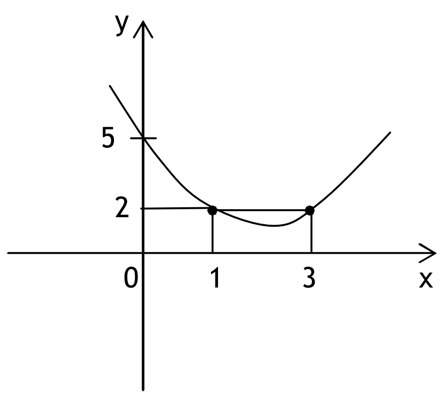
I)



II)



III)



a) En cada una de las gráficas indica si $\Delta = b^2 - 4ac$ es mayor, menor o igual a cero. Concluye en cada caso, cuáles son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
b) En cada caso, ¿cuál es el signo del coeficiente a ?
c) En (II) si $x \in [-2,3]$ ¿cuál es el signo de $h(x)$?
d) Determinar en II, los valores de a, b, c y escribir la ecuación correspondiente.

4. Determinar los coeficientes a, b, c del trinomio $y = ax^2 + bx + c$ para que la parábola correspondiente pase por los puntos $A(-1;0)$, $B(1;4)$, $C(4;2,5)$.

5. Se considera la función numérica f_m tal que $f_m(x) = (m-1).\, x^2 - 2x.\, (m+2) + m + 1$

a) Trazar la gráfica de las funciones f_1 y f_2 para $m = 1$ y $m = 2$, respectivamente.
b) ¿Para cuáles valores de m , f_m admite un mínimo?
c) Determinar m para que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación $f_m(x) = 0$ verifiquen $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

6. Dada la función f definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$, se pide:

a) Representar gráficamente la función f.
b) Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con las rectas $y = x$, $y = -x$.
c) Se corta la curva obtenida en **a)** con la familia de rectas $y = m$. Deducir, según los valores de m, la existencia de las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 5 - m = 0$.
d) ¿Qué significado geométrico tiene la solución de la ecuación **c)** ?

7. Sea h la función definida por $h(x) = x^2 - 3$ y la familia de rectas $y = 2x + m$ (m parámetro real). Determinar los valores de m para los cuales la recta es tangente, secante o exterior a la parábola.

4. Inecuaciones de Primer Grado y de Segundo Grado con una incógnita. Inecuaciones que se reducen a ellas.

Previamente debemos recordar algunas propiedades de las desigualdades y la definición de intervalo en sus distintas modalidades.

Se recuerda que:

♦ Si a ambos miembros de una desigualdad de números reales se le suma un mismo número real se obtiene una desigualdad del mismo sentido de la primera.

Simbólicamente:

Si $a \geq b \quad \wedge \quad c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c \geq b + c$

♦ Si ambos miembros de una desigualdad de números reales se multiplica por un número real positivo se obtiene una desigualdad del mismo sentido de la primera.

Simbólicamente:

Si $a \geq b \quad \wedge \quad c > 0$ entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$

♦ Si ambos miembros de una desigualdad de números reales se multiplica por un número real negativo, se obtiene una desigualdad de sentido contrario a la primera.

Simbólicamente:

Si $a \geq b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$

Intervalos de números reales: Son subconjuntos de números reales definidos así:

Se Lee	Se Escribe	Se Define
• Intervalo cerrado de extremos a y b	$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
• Intervalo abierto de extremos a y b	(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
• Intervalo semiabierto o semicerrado de extremos a y b	$(a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$
	$[a,b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
• Intervalo con extremos $+\infty, -\infty$	$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$
	$(-\infty,a]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

> Una inecuación de primer grado con una incógnita se reduce a la forma:
>
> $ax + b \geq 0$ $\quad$ $ax + b > 0$
>
> $ax + b \leq 0$ $\quad$ $ax + b < 0$
>
> con a y b números reales.

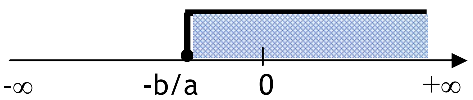
Se analiza una de ellas pues las otras son similares:

Si tenemos la inecuación $ax + b \geq 0$ podemos considerar los siguientes casos:

Caso 1: $a > 0$ luego se despeja x : $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Rightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$

La solución es: $S = \left[-\dfrac{b}{a}\ ,\ +\infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \ \middle|\ x \geq -\dfrac{b}{a}\right\}$

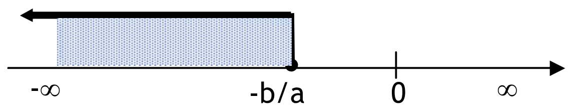
Gráficamente:



Caso 2: $a < 0$ luego se despeja x : $ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b \Rightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$

La solución es: $S = \left(-\infty\ ,\ -\dfrac{b}{a}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \ \middle|\ x \leq -\dfrac{b}{a}\right\}$

Gráficamente:



Caso 3: Si $a = 0$ queda la inecuación $0 \cdot x + b \geq 0$

Si $b \geq 0$ la solución es el conjunto $\mathbb{R}$

Si $b < 0$ la inecuación no tiene solución. $S = \varnothing$

Ejemplos:

- Resolver en $\mathbb{R}$ la inecuación: $-\frac{3}{2}x - \frac{x+1}{3} \leq -\frac{3}{5}(x-1)+4$

Solución:

Calculamos *mcd* y efectuamos las operaciones indicadas para reducirla a la forma $ax + b \leq 0$.

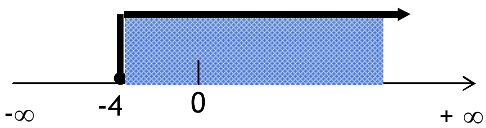
Como *mcd* $(2,3,5) = 30$, luego:

$$-45x - 10x - 10 \leq -18x + 18 + 120$$
$$-37x - 148 \leq 0$$

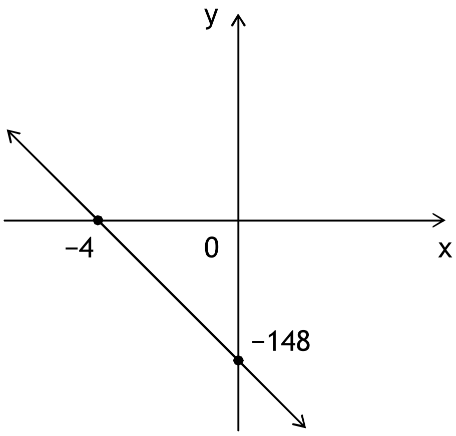
Despejando x (observa que $-37 < 0$)

$$x \geq -\frac{148}{37}$$
$$x \geq -4$$
$$S = [-4, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -4\}$$

Gráficamente



Geométricamente se observa que, al dibujar la recta de ecuación $y = -37x - 148$, tenemos:



La tabla del signo es:

x	-∞ - 4 +∞
$y=f(x)$	+ + + + + + + 0 - - - - - - -- - - -

Las inecuaciones de segundo grado con una incógnita se reducen a la forma:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ó} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ó} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

Con a, b y c números reales y $a \neq 0$.

Ejemplo:

- Resolver la inecuación $x^2 - x - 6 > 0$

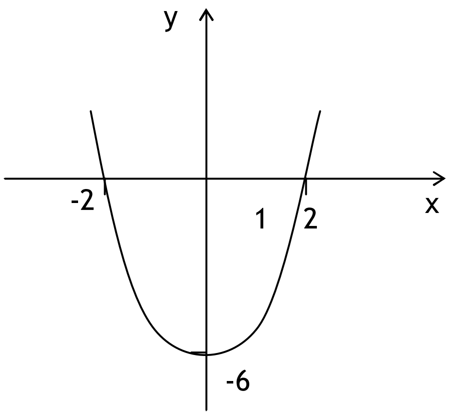
<u>Solución</u>:

- ♦ Procedimiento 1:
  Considerar $y = x^2 - x - 6$ y dibujar la parábola correspondiente

  - $a > 0$ Cóncava hacia arriba
  - Cortes ejes: a) eje y: $x = 0 \quad y = -6 \quad P(0, -6)$

    b) eje x: $x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-2) = 0$
    $\Rightarrow x_1 = 3 , \quad x_2 = -2$
    $Q\,(3\ ,\ 0)$, $R\,(-2\ ,\ 0)$

Gráfica aproximada



La Tabla del Signo es:

x	-∞ -2 3 +∞
$y = x^2 - x - 6$	+ + + + + 0- - - - 0 + + + + + +

La solución de la inecuación es $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

♦ Procedimiento 2:

Se factoriza el primer miembro de la inecuación: $(x+2)(x-3)>0$

Como el producto de dos factores es positivo cuando los factores tienen el mismo signo, debemos considerar dos casos:

a) $x+2>0$ y $x-3>0$ ó b) $x+2<0$ y $x-3<0$

a) $x+2>0$ y $x-3>0 \Rightarrow x>-2$ y $x>3 \quad \Rightarrow \quad x>3$, luego $S_a=(3,+\infty)$

b) $x+2<0$ y $x-3<0 \Rightarrow x<-2$ y $x<3 \quad \Rightarrow \quad x<-2$, luego $S_b=(-\infty,-2)$

La solución de la inecuación es: $S=S_a \cup S_b=(3,+\infty)\cup(-\infty,-2)$

A continuación dos ejemplos resueltos de inecuaciones de grado mayor a dos o con la incógnita en el denominador, cuya solución se reduce a resolver inecuaciones de primer grado y segundo grado.

Ejemplos:

- Resolver la inecuación $(x+4)(2x+1)(3x-1)\le 0$

Solución:

Estudiemos cada factor por separado, calculando el corte con el eje x.

* $x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4$

X	-∞ - 4 +∞
$x+4$	- - - - - - - - - 0 + + + + + +

* $2x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$

x	-∞ - ½ +∞
$2x+1$	- - - - - - - - - 0 + + + + + + +

* $3x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{3}$

x	-∞ 1/3 +∞
$3x-1$	- - - - - - 0 + + + + + +

Tabla del Signo:

x	$-\infty$ - 4 - / / $+\infty$
$x+4$	- - - - - - - 0 +
$2x+1$	- - - - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + + + ++
$3x-1$	- 0 + + + + + + + + + ++
$(x+4)\cdot(2x+1)\cdot(3x-1)$	- - - - - - - **0** + + + + + + + **0** - - - - - **0** + + + + + + + + + +

Y la *solución* de la inecuación es el conjunto: $S=(-\infty\ ,\ -4]\cup\left[-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\right]$

- Resolver la inecuación $\frac{2}{x+1}-2\ <\ \frac{1}{x-2}$

Solución:

Se observa, en primer lugar, que el conjunto solución de la inecuación debe excluir los valores $x=-1$ y $x=2$, para los cuales se anulan los denominadores. (Se representa en la tabla del signo como una doble barra II)

Se trasponen los términos: $\frac{2}{x+1}-2-\frac{1}{x-2}<0$

Se realizan las operaciones: $\frac{2\cdot(x-2)-2\cdot(x+1)\cdot(x-2)-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}<0$

Se efectúa y factoriza: $\frac{-2\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)\cdot(x-2)}<0$

Se construye la tabla del signo:

x	$-\infty$ -1 $\frac{1}{2}$ 1 2 $+\infty$
$-2\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$	- - - - - - - - - - - - - - - - - -0+ + + + + +0 - - - - - - - - - - --
$(x+1)\cdot(x-2)$	+ + + + + 0 -0 + + + +
$\frac{-2\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)\cdot(x-2)}$	- - - - - - - - ‖ + + + + + + + 0- - - - - - - 0+ + + ‖ - - - - -

El conjunto solución es: $S=(-\infty\ ,\ -1)\cup\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)\cup(2\ ,\ +\infty)$

Inecuaciones con Valor absoluto

Además de la definición de valor absoluto, existen dos propiedades que se aplican en la resolución de inecuaciones, que son:

Propiedad 1: $\begin{cases} |x| \leq a & \Leftrightarrow & -a \leq x \leq a \quad , \quad a > 0 \\ |x| < a & \Leftrightarrow & -a < x < a \quad , \quad a > 0 \end{cases}$

Propiedad 2: $\begin{cases} |x| \geq a & \Leftrightarrow & x \geq a \text{ o } x \leq -a \quad , \quad a > 0 \\ |x| > a & \Leftrightarrow & x > a \text{ o } x < -a \quad , \quad a > 0 \end{cases}$

Ejemplos:

- Resolver la inecuación $|x-5| \leq 8$

Solución:

Como $a = 8 > 0$, por la propiedad 1 se tiene:

$$\begin{aligned} |x-5| \leq 8 \quad & \Leftrightarrow \quad -8 \leq x-5 \leq 8 \\ & \Leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 13 \end{aligned}$$

La solución es: $= S = [-3 \ , \ 13]$

- Resolver la inecuación $\left|\frac{1}{2}x+5\right| > \frac{3}{5}$

Solución:

Como $a = \frac{3}{5} > 0$, por la propiedad 2 se tiene:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}x+5\right| > \frac{3}{5} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x+5 > \frac{3}{5} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}x+5 < -\frac{3}{5} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x > \frac{3}{5}-5 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}x < -\frac{3}{5}-5 \\ & \Leftrightarrow \quad x > 2\cdot\left(-\frac{22}{5}\right) \quad \text{ó} \quad x < 2\cdot\left(-\frac{28}{5}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad x > -\frac{44}{5} \quad \text{ó} \quad x < -\frac{56}{5} \end{aligned}$$

La solución es el conjunto: $S = \left(-\infty \ , \ -\frac{56}{5}\right) \cup \left(-\frac{44}{5} \ , \ +\infty\right)$

- Resolver la inecuación $|3x-5|<-5$

Solución:

Como $a=-5<0$ no podemos aplicar la propiedad 1. Sin embargo, como el valor absoluto siempre es mayor o igual que cero, se concluye que la inecuación no tiene solución.

Práctica IV

1. Representar en la recta real los siguientes conjuntos ($\Re$ es el conjunto de todos los números reales):

a) $[2,5]=\{x\in\mathbb{R}:2\le x\le 5\}$
b) $(-2,0]=\{x\in\mathbb{R}:-2<x\le 0\}$
c) $[-5,5)=\{x\in\mathbb{R}:-5\le x<5\}$
d) $\left(-5,-\sqrt{2}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:-5<x<-\sqrt{2}\right\}$
e) $(-\infty,\pi]=\{x\in\mathbb{R}:x\le\pi\}$
f) $(-2,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:-2<x\}$

2. Representar gráficamente los conjuntos de números reales x que se indican a continuación y escribirlos utilizando la notación de intervalo:

a) $-5< x \le 7$

b) $\frac{1}{2}< x < 3$ ó $x=5$

c) $x\ne 2$ y $x\ne -2$ y $x\ne\frac{1}{2}$

d) $\mathbb{R}-\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

e) $x\le\frac{3}{2}$ y $x\ge\frac{1}{2}$

f) $x\le\frac{3}{2}$ ó $x\ge\frac{1}{2}$

3. Resolver las siguientes inecuaciones en x, es decir, determinar todos los números reales x que hacen que las desigualdades sean verdaderas. Escribir, si es posible, la solución con la notación de intervalos y representarla gráficamente:

a) $\frac{-4(x-1)+7}{2}\ge 2x+1$

b) $\frac{3x^2}{2}+\frac{(x-1)^2}{2}\le 2x^2+\frac{x+1}{4}$

c) $3x^2+1\le 0$

d) $x^2-1\ge 0$

e) $\dfrac{x-3}{2x-4} \geq 0$

f) $\dfrac{2}{x-1} \leq 3$

g) $\dfrac{-2x+4}{x+5} < 1$

h) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3-x}$

i) $\dfrac{-x^2-x+2}{x-1} < -1$

j) $\dfrac{x^2+x-2}{x(x^2+5x+4)} > 0$

k) $\dfrac{x^2-4}{x+2} - \dfrac{x^2+x-6}{x-2} > x-1$

l) $3x^3(x^2-2) \leq 0$

4. Calcular los valores de x para los cuales la expresión: $(4x-3)^2-(16x^2-4)-(3-4x)$ es positiva.

5. En la fracción racional $\dfrac{6x+1}{9-4x}$ con $x \in [-2,2]$ se quieren determinar los valores de x para los cuales el numerador es mayor que el denominador.

6. Al multiplicar dos números naturales A y B se obtiene un número C tal que $100 < C < 200$. Si se conoce que $5 < A < 10$. ¿Qué se puede decir de B?.

7. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} |x-2| < 3 \\ x(x+3) > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x^4(x+2)^6 < 0 \\ |x-1| \leq 3 \\ x \geq -5 \end{cases}$

5. Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Interpretación geométrica

Interpretación geométrica

En el capítulo II se estudiaron los distintos métodos de solución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. A continuación se da un resumen de la interpretación geométrica de las soluciones del sistema

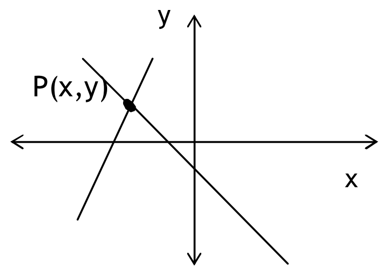
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

con a ,b ,c ,a' ,b' ,c' números reales y a' ,b' ,c' no nulos.

<u>*Solución*</u>*:*

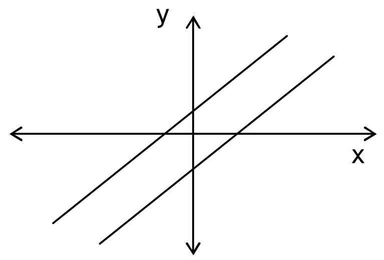
Representación Gráfica

- $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$: el sistema es compatible y la solución es única.



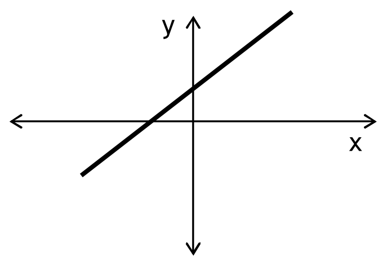
Las dos rectas se cortan en un único punto

- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$: el sistema es incompatible (no tiene solución).



Las rectas son paralelas

- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$: el sistema es indeterminado , tiene infinitas soluciones.



Las rectas coinciden

Ejemplos:

- Resolver el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 7 & (1) \\ 5x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

Podemos escoger cualquier método para resolverlo. Se observa que $\frac{2}{5} \neq -\frac{2}{6}$, luego tiene una solución única. Por reducción:

$$\begin{cases} 6x - 6y = 21 & (1) \\ 5x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$$

$$11x = 33 \qquad x = \frac{33}{11} = 3$$

Sustituyendo obtenemos el valor de y: $\quad y = \frac{21-18}{-6} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

La solución es el par $\left(3\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$.

Si representamos gráficamente las rectas de ecuaciones (1) y (2) se tiene:

(1) $\quad y = \frac{7-2x}{-2} = x - \frac{7}{2}$

Cortes con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{2} \quad P\left(0\ ,\ -\frac{7}{2}\right)$

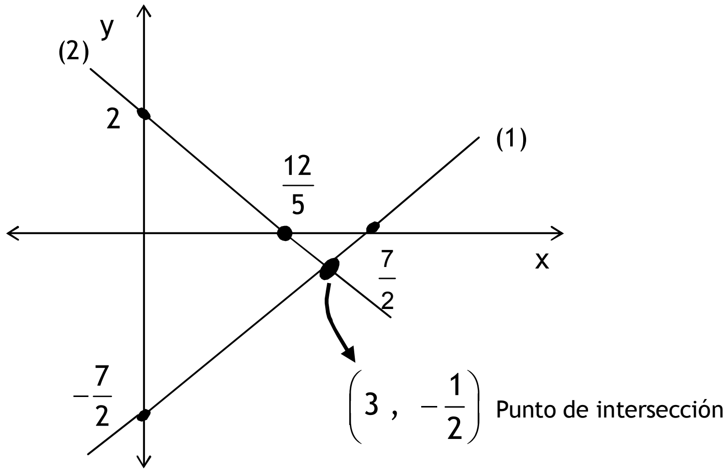
$y = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \quad Q\left(\frac{7}{2}\ ,\ 0\right)$

(2) $\quad y = \frac{12-5x}{6} = -\frac{5}{6}x + 2$

Cortes con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 2 \quad P'(0\ ,\ 2)$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{5} \quad Q'\left(\frac{12}{5}\ ,\ 0\right)$

La representación gráfica de ambas rectas es



La solución del sistema $\left(3\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ representa geométricamente las coordenadas del punto intersección de ambas rectas.

- Resolver el sistema

$$\begin{cases} 6x+9y=7 & (1) \\ 4x+6y=-24 & (2) \end{cases}$$

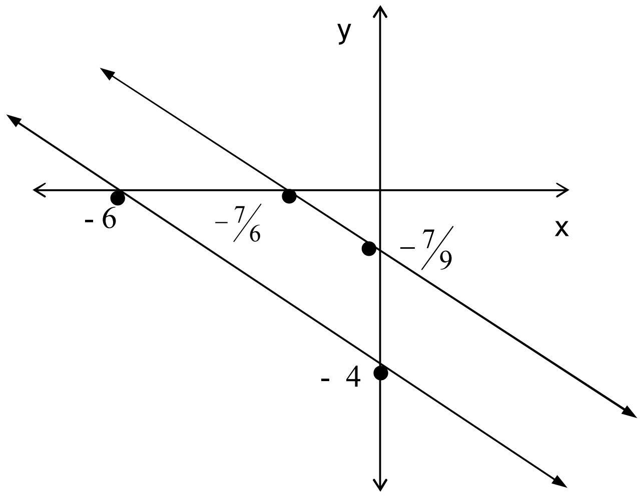
<u>*Solución*</u>*:*

Se observa que $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}\neq-\frac{7}{24}$, luego es incompatible. Al representar gráficamente las dos rectas se tiene:

r_1 : $y=-\frac{2}{3}x-\frac{7}{9}$. La pendiente es $-\frac{2}{3}$

r_2 : $y=-\frac{2}{3}x-4$. La pendiente es $-\frac{2}{3}$

Luego son rectas paralelas: $r_1 \parallel r_2$



- Resolver el sistema

$$\begin{cases} 6x - 2y = -4 \\ 15x - 5y = -10 \end{cases}$$

<u>*Solución*</u>*:*

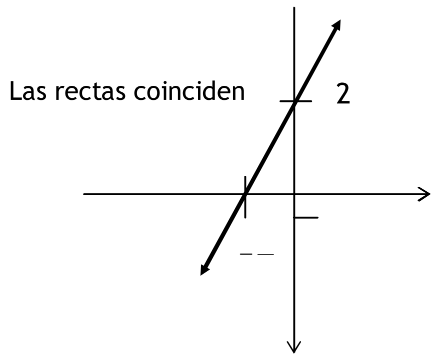
Como $\frac{6}{15} = \frac{-2}{-5} = \frac{-4}{-10}$, las dos ecuaciones se reducen (al simplificar) a una única ecuación $y = 3x + 2$; es decir, las rectas coinciden y el sistema es indeterminado tal que $x \in \mathbb{R}$ e $y = 3x + 2$. Por ejemplo:

Si $x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 8$. Solución: $(2\ ,\ 8)$

Si $x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$. Solución: $(-1\ ,\ -1)$

Si $x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 3$. Solución: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 3\right)$

y así sucesivamente, se obtienen las coordenadas de los puntos de la recta $y = 3x + 2$.



- Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + y = m+3 \\ 3x + (m-1)y = -3 \end{cases}$$

m es un parámetro.

<u>*Solución*</u>*:*

Se forma el determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 3 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m+2)\cdot(m-2)$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$ entonces $\Delta \neq 0$ y el sistema admite <u>*una*</u> solución

$$\Delta x = \begin{vmatrix} m+3 & 1 \\ -3 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m \qquad x = \frac{m}{m-2}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} m+1 & m+3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6\cdot(m+2) \qquad y = \frac{-6}{m-2}$$

Si $m = -2$ entonces $\Delta = 0$. El sistema se escribe:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ 3\cdot(x - y) = -3 \end{cases}$$

Todo par (*x* ,*y*) tal que $x \in \mathbb{R}$ e $y = x + 1$ es solución. Hay una indeterminación

Si $m = 2$ entonces $\Delta = 0$. El sistema se escribe:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$$ no tiene solución

Práctica V

1. Resolver los siguientes sistemas y representar gráficamente su solución:

a) $$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} \\ x - y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{5} - \dfrac{4x+2y}{15} + \dfrac{7}{3} = 0 \\ \dfrac{x+y}{2} = 1 - \dfrac{17}{4} \end{cases}$$

2. Resolver y discutir en □ el siguiente sistema con x e y incógnitas, y m un parámetro

$$\begin{cases} m \cdot x + y = m - 1 \\ 2m \cdot x + 2y = m + 3 \end{cases}$$

3. Dos números están en la relación de 5 a 6. Si el menor aumenta en 2 y el mayor en 6, la relación es 9 a 8. Calcular los números.

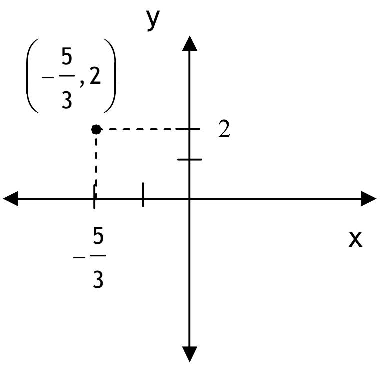
4. Seis veces el ancho de una habitación excede en 4 m. a la longitud de la habitación, y si la longitud se aumenta en 3 m. y luego se divide entre el ancho, el cociente es 5 y el resto es 3. Hallar las dimensiones de la habitación.

Respuestas

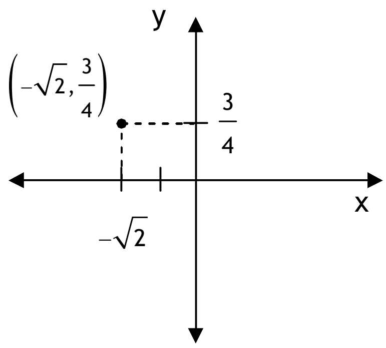
Práctica I

1.

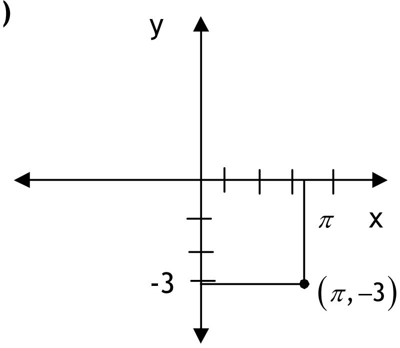
a)



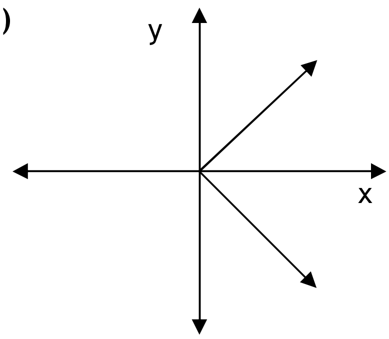
b)



c)

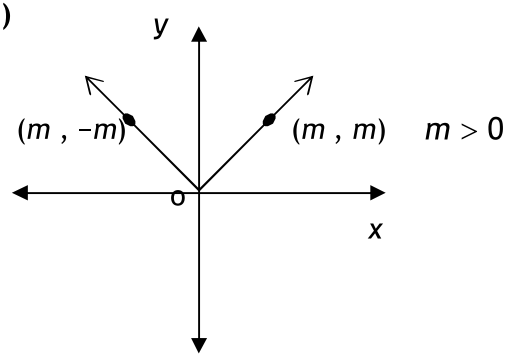


d)



$$|b| = \begin{cases} b & \text{si} \quad b \geq 0 \\ -b & \text{si} \quad b < 0 \end{cases}$$

e)



2.

2.a) No 2.b) Si 2.c) Si

3.

3.a) No 3.b) No 3.c) Si

3.d) Si | 3.e) No | 3.f) No

3.g) Si | 3.h) Si

4.

4.a) $\frac{16}{3}$

4.b) $-\frac{5}{11}$

4.c) No está definido

4.d) $\sqrt{29}$

4.e) No está definido

4.f) $\frac{271}{3}$

4.g) $\frac{16}{3}$

4.h) $-\frac{244}{155}$

4.i) $\frac{1208}{25}$

4.j) $-\frac{28}{11}$

5.

5.a) 5

5.b) 8

5.c) 5

5.d) 5

5.e) $\frac{13}{2}$

6.

6.a) $-1+x^2$

6.b) $h(x)+1=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

7.

7.a) $\frac{a+2b}{a}$

7.b) $\frac{1+b^2}{(1-b).(1+b)}$

7.c) No se puede calcular porque $g(b)$ no está definido

8.

8.a) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$$x \to f(x) = x^3$$

8.b) $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$$x \to g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

8.c) $f\colon\ [0,4] \to [0,4]$

$$a \ \to \ f(a) = \sqrt{16 - a^2} = b$$

8.d) f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$h \to f(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi . h}} = r$$

$$f(0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{\pi .(0{,}5)}} = r$$

Práctica II

1. a) $D_f =$ □   b) $D_t =$ □   c) $D_g = [-2,2]$

d) $D_{sgn} =$ □   e) $D_n = (-\infty, 6)$

2. d) (i) $(-\infty,-2)$ (ii) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ (iii) $(-3,+\infty)$

(iv) $\left[-3,-\frac{3}{2}\right]$

5. a)

X	-∞ $-\frac{1}{2}$ +∞
$2x+1$	- - - - - - - -0 + + + + + + +

x	-∞ $\frac{1}{2}$ +∞
$2x-1$	- - - - - - 0 + + + + +

6.

a) tg 30° $= \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) *tg* 120° $= -\sqrt{\ }$ d) $-\frac{2}{3}$

7. $-\frac{1}{2}$; -2

8. b)

x	-∞ 4 +∞
$f(x)$	+ + + + + + + 0 - - - - - - - -

c) (i) x = 2   (ii) $(-\infty, 2)$

d) (2,1)

Práctica III

1.

a) $D_t = \square$, $R_t = [-9, +\infty)$, V $(-2, -9)$, P(0, -5), Q(1,0), R(-5,0

b) $D_p = \square$, $R_p = (-\infty\ ,\ 0]$,V$(1\ ,\ 0)$, P(0, -1), Q(1,0

c) $D_h = \square$,$R_h = [-1, +\infty)$, V $(1, -1)$, P(0,0), Q (2,0)

d) $D_f = \square$, $R_f = [5, +\infty)$, V$(0,5)$, P(0,5), No corta al eje x

e) $D_g = \square$, $R_g = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, V $\left(0\ , \frac{1}{2}\right)$, P(0,1/2), No corta el eje x

f) $D_m = \square$, $R_m = \left(-\infty, \frac{25}{16}\right]$, V $\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{16}\right)$, P(0,1), Q(2,0), R(-1/2, 0)

2.

a) $f(0) = 16$ pies

b) 80 pies

3.

a) (I) $\Delta =$
(II) $\Delta > 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
(III) $\Delta < 0$

b) (I) $a < 0$
(II) $a > 0$
(III) $a > 0$

c) $h(x) \leq 0$

d) (II) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

4. $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$; $c = \frac{5}{2}$

5. b) $m > 1$ c) $m_1 = \frac{17 + 4\sqrt{22}}{7}$, $m_2 = \frac{17 - 4\sqrt{22}}{7}$

6. b)

$$\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2}\ ,\ \frac{7+\sqrt{29}}{2}\right), \left(\frac{7-\sqrt{29}}{2}\ ,\ \frac{7-\sqrt{29}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\ ,\ -\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\ ,\ -\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

c) y d) Si m > - 4 existen dos raíces reales y distintas, luego la recta corta a la parábola en dos puntos de la curva.

Si m = - 4 existe una raíz doble, luego la recta corta a la parábola en un punto.
Si m < -4 no existen raíces reales y la recta no corta a la parábola.

7. m = -4 tangente
m > -4 secante
m < -4 exterior

Práctica IV

2.

a) $(-5\,,7]$

b) $\left(\frac{1}{2}\,,3\right)\cup\{5\}$

c) $(-\infty\,,-2)\cup\left(-2\,,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}\,,2\right)\cup(2\,,+\infty)$

d) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ □ $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

e) $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

f) $\mathbb{R}$

3.

a) $\left(-\infty\,,\frac{9}{8}\right]$

b) $\left[\frac{1}{5}\,,+\infty\right)$

c) No tiene solución en □

d) $(-\infty\,,-1]\cup[1\,,+\infty)$

e) $(-\infty\,,2)\cup[3\,,+\infty)$

f) $(-\infty\,,1)\cup\left[\frac{5}{3}\,,+\infty\right)$

g) $(-\infty \quad - \quad)\cup\left(-- \quad +\infty\right)$

h) $(2,3)$

i) $(-1\,,+\infty)-\{1\}$

j) $(-4\,,-2)\cup(-1\,,0)\cup(1\,,+\infty)$

k) $(-\infty\,,-4)$

l) $\left(-\infty\,,-\sqrt{2}\right]\cup\left[0\,,\sqrt{2}\right]$

4. $x<\frac{1}{2}$

5. $\frac{4}{5} < x \leq 2$

6. $16 < B < 23$

7.
a) $(0\ ,5)$

b) $(-2\ ,4] - \{0\}$

Práctica V

1. a) x = 7 , y = 1

b) $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{21}{10}$

c) $x = -\frac{213}{26}$, $y = \frac{22}{13}$

2. m = 5 indeterminado
m $\neq$ 5 no tiene solución

3. 25 y 30

4. 20 m. x 4m.

<u>Autoevaluación</u>

1. Si $g(x) = 4^x$ entonces el valor de $g\left(-2^{-1}\right)$ es:

a) 16 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{16}$ **d)** $\frac{1}{2}$

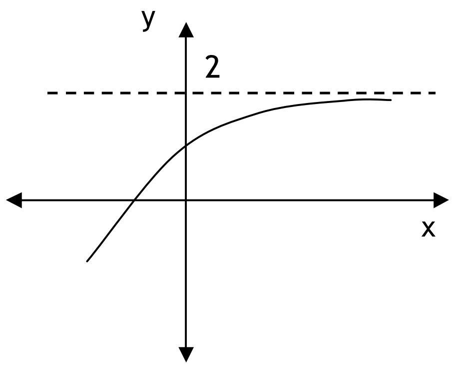
2. El valor de t para que el punto de coordenadas $(-1, 2)$ pertenezca a la gráfica de la función *f* definida por $f(x) = x^2 + tx - 6$ es:

a) 7 **b)** −9 **c)** 9 **d)** −7

3. Dada la función g definida por $g(x) = -2\sqrt{x+1} - x$, las raíces reales de la ecuación $g(x) = 1$ son:

a) 3 y −1 **b)** −1 **c)** −3 y 1 **d)** 3

4. A continuación se indica la gráfica de la función g . El dominio y el rango de la función *g* es:



a) $D_f = \square$, $R_f = [0\ ,\ 2]$ **b)** $D_f = (-\infty\ ,\ 2)$, $R_f = \square$
c) $D_f = \square$, $R_f = (-\infty\ ,\ 2]$ **d)** $D_f = \square^+$, $R_f = (-\infty\ ,\ 2]$

5. Al resolver en $\square$ la inecuación $|3x - 4| < 5$ la solución es:

a) $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ **c)** $(-5, 9)$ **d)** $(-5, -3)$

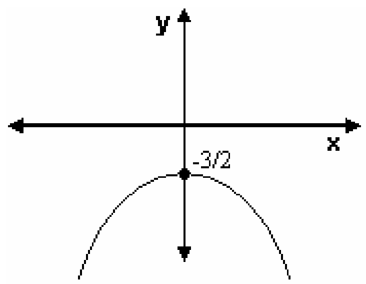
6. Al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ -6x - 4y = 7 \end{cases}$$

se puede concluir que la solución es:

a) Única y las rectas se intersecan en un punto
b) No tiene solución y las rectas son paralelas
c) No tiene solución y las rectas se intersecan en un punto
d) Tiene infinitas soluciones y las rectas coinciden

7. La función cuadrática f que corresponde a la gráfica



tiene como imagen de x:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

8. Al resolver en □ la inecuación $x^2 \leq 4x$ la solución es:

a) $(-\infty, 4]$ **b)** $(0, 2)$ **c)** $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ **d)** $[0\ ,\ 4]$

9. La ecuación de la recta de pendiente -2 e intersección con el eje y, el punto P(0 , 3) es:

a) $y - 2x + 3 = 0$ **b)** $y + 2x - 3 = 0$
c) $-y - 2x + 3 = 0$ **d)** $2y + 2x - 3 = 0$

10. Dada la función cuadrática h definida por $h(x) = x^2 - 6x + p$, el valor de p para que las raíces de la ecuación $h(x) = 0$ sean reales e iguales es:

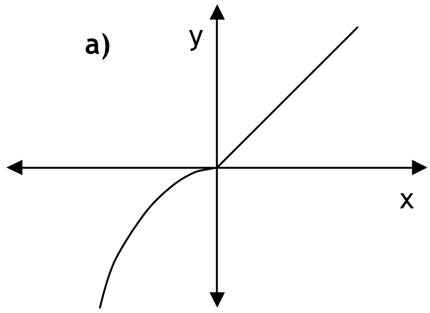
a) $p > 9$ **b)** $p < 9$ **c)** $p = 9$ **d)** $p = 0$

11. Sea *f* la función definida por:

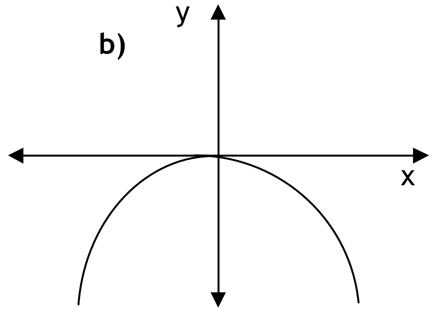
$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x\geq 0\\ -x^2 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

La gráfica de *f* es:

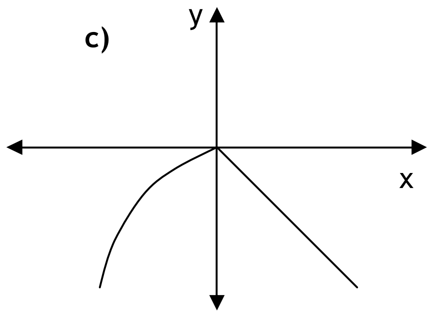
a)



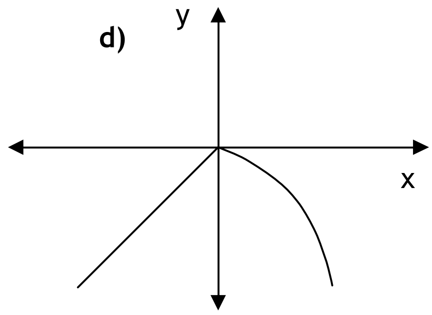
b)



c)



d)



12. El dominio de la función *g* definida por $g(x)=\sqrt{2x-4}$ es:

a) $\mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{R}^+$ **c)** $[2,+\infty)$ **d)** $(-\infty,2]$

13. Pedro siempre miente al decir su edad. Hace 4 años decía que tenía 25 años pero en realidad este número era igual a $\frac{5}{6}$ de su edad verdadera. ¿Qué edad tiene Pedro actualmente?

a) 29 años **b)** 26 años **d)** 30 años **d)** 34 años

14. La edad de Alberto hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Al calcular la edad actual se obtiene:

a) 12 años **b)** 10 años **c)** 14 años **d)**20 años

15. Un tren ha recorrido 200 km. en cierto tiempo. Si esa distancia la hubiese recorrido en una hora menos, su velocidad debía haber sido 10 km. por hora más. La velocidad del tren es:

a)10 km/h **b)**60 km/h **c)**50 km/h **d)**40 km/h